ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK TENGLAMASIDA VAQTGA BOG'LIQ KOEFFISIYENTNI ANIQLASHNING TESKARI MASALASI

Norbayev Sherali Shixnazarovich
Osiyo Xalqaro Universiteti. Matematika yo'nalishi magistranti.

Annotatsiya. *Ushbu maqolada issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasida vaqtga bog'liq issiqlik manba koeffisiyentini aniqlashning teskari masalasi o'rganiladi. Masala to'g'ri masala bilan bir qatorda qo'shimcha integral shartni o'z ichiga oladi. Mavjud bo'lish va yagonalik teoremasi isbotlanadi, yechimni taxminiy topish uchun iteratsion usul taklif etiladi va uning yaqinlashishi tekshiriladi. Olingan natijalar fizik jarayonlarni modellashtirish va sanoat muammolarini hal qilishda amaliy ahamiyat kasb etadi.*

Kalit so'zlar: *teskari masala; issiqlik o'tkazuvchanlik tenglama; vaqtga bog'liq koeffisiyent; mavjud bo'lish; yagonalik; iteratsion usul; integral shart.*

Аннотация. *В данной статье исследуется обратная задача определения зависящего от времени коэффициента источника тепла в уравнении теплопроводности. Задача включает дополнительное интегральное условие наряду с прямой задачей. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Для приближённого нахождения решения предложен итерационный метод и исследована его сходимость. Полученные результаты имеют практическое значение при моделировании физических процессов и решении промышленных задач.*

Ключевые слова: *обратная задача; уравнение теплопроводности; зависящий от времени коэффициент; существование; единственность; итерационный метод; интегральное условие.*

Abstract. *This paper investigates the inverse problem of determining a time-dependent source coefficient in the heat conduction equation. The problem includes an additional integral overdetermination condition alongside the direct problem. Theorems on the existence and uniqueness of the solution are proved. An iterative method for the approximate solution is proposed and its convergence is established. The obtained results have practical significance for modelling physical processes and solving industrial problems.*

Keywords: *inverse problem; heat conduction equation; time-dependent coefficient; existence; uniqueness; iterative method; integral overdetermination condition.*

I. KIRISH

Zamonaviy matematika fizikasida to'g'ri masalalar bilan bir qatorda teskari masalalar ham muhim o'rin tutadi. Teskari masalalar — tenglamaning koeffisiyentlari, dastlabki shartlar yoki manba funksiyalari to'g'risidagi qo'shimcha ma'lumotlar asosida ularni aniqlashni talab etuvchi masalalar sinfidir. Bunday masalalar issiqlik o'tkazish, elektromagnit maydon, mexanik tebranishlar va boshqa ko'plab fizik jarayonlarni modellashtirish natijasida yuzaga keladi [1, 2].

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasida teskari masalalar, ya'ni manba koeffisiyentini aniqlash muammosi matematik fizika va hisoblash matematikasining dolzarb yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Bunday masalalarning noto'g'ri qo'yilganligi (A. N. Tixonovning ma'nosi bo'yicha) ularni o'rganishni yanada murakkablashtiradi [3].

Hozirgi vaqtda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamalarida noma'lum koeffisiyentlarni aniqlashga bag'ishlangan ko'plab ishlar mavjud. Cannon (1968) [4] noma'lum manba funksiyasini aniqlash masalasini o'rgangan bo'lsa, Isakov (1990) [5] teskari masalalarni isbotlashning umumiy nazariyasini ishlab chiqdi. O'zbekiston matematiklari ham bu sohaga katta hissa qo'shganlar: Kabanikhin, Durdiev va boshqalar [6, 7].

Ushbu maqolada quyidagi teskari masala o'rganiladi: berilgan qo'shimcha integral shart asosida issiqlik tenglamasidagi vaqtga bog'liq manba koeffisiyentini aniqlash. Maqolaning asosiy natijasi — yechimning mavjud bo'lishi va yagonaligini tasdiqlovchi teoremanin isboti hamda yechimni topishning samarali iteratsion usuli.

II. MASALANING QO'YILISHI

Quyidagi soha va belgilashlarni kiritamiz:

QT = {(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t ≤ T} — to'rtburchak soha

Quyidagi to'g'ri masalani ko'rib chiqamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(t) \cdot f(x,t), \ \ (x,t) \in QT \quad (1)$$

bu erda

u(x, t) — noma'lum temperatura funksiyasi;

a(t) — vaqtga bog'liq noma'lum manba koeffisiyenti (asosiy izlanuvchi noma'lum);

f(x, t) — berilgan funksiya (manba zichligi).

Dastlabki shart:

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ 0 \le x \le 1 \ \ (2)$$

Chegaraviy shartlar:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T \ \ (3)$$

Teskari masalani yechish uchun quyidagi qo'shimcha integral shart beriladi:

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = E(t), \ \ 0 \le t \le T \ \ (4)$$

bu erda E(t) — berilgan, o'lchash natijasida ma'lum bo'lgan funksiya.

Shunday qilib, teskari masala quyidagicha: (1)–(3) masalaning yechimi u(x, t) va noma'lum a(t) koeffisiyentini topish lozim, (4) qo'shimcha shartni qanoatlantiruvchi holda.

III. YORDAMCHI NATIJALAR

Asosiy teoremani isbotlashdan oldin bir qancha yordamchi natijalarni keltirish zarur. Quyida ishlatiladigan funksional fazolarni aniqlaymiz.

C([0,T]) — [0,T] kesmada uzluksiz funksiyalar fazosi, sup-norma bilan;

$C^{2,1}_{\circ}$([0,1]×[0,T]) — x bo'yicha ikkinchi, t bo'yicha birinchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega funksiyalar fazosi.

Berilgan ma'lumotlarga quyidagi shartlarni qo'yamiz:

(A1) f(x, t) ∈ C([0,1]×[0,T]), f(x, t) ≥ δ > 0;

(A2) $u_0(x) \in C^2([0,1])$, $u_0(0) = u_0(1) = 0$;

(A3) $E(t) \in C^1([0,T])$, $E(0) = \int_0^1 u_0(x)dx \neq 0$.

1-lemma (Yordamchi baho). (A1)–(A3) shartlar bajarilsin. U holda (1)–(3) masalaning har qanday yechimi u(x, t) uchun quyidagi integral identifikatsiya munosabati o'rinli:

$$E'(t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, dx + a(t)\int_0^1 f(x,t)\, dx \quad (5)$$

Isboti. (1) tenglamani x bo'yicha [0,1] da integrallaymiz va chegaraviy shartlardan (3) foydalanib, ikkinchi tartibli hosilaning integralini hisoblashning integrallash bo'yicha formulasini qo'llaymiz:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = [\frac{\partial u}{\partial x}]_0^1 + a(t)\int_0^1 f(x,t)\, dx \quad (6)$$

Leibniz qoidasini qo'llab, chap tomondagi integralning t bo'yicha hosilasini hisoblaymiz va E(t) ta'rifidan foydalanib, (5) ga kelamiz. Lemma isbotlandi. □

IV. MAVJUD BO'LISH VA YAGONALIK TEOREMASI

Ushbu bo'limda teskari masalaning asosiy nazariy natijasini taqdim etamiz.

Teorema. (A1)–(A3) shartlar bajarilsin va T yetarlicha kichik bo'lsin. U holda (1)–(4) teskari masalaning $C^2{}_\circ{}^1(Q\_T) \times C([0,T])$ sinfida yagona yechimi mavjud bo'ladi, ya'ni yagona {u(x, t), a(t)} juftligi mavjud.

Isbotning asosiy g'oyasi.

Isbotni ikki qismga bo'lamiz: avval yagonalikni, so'ng mavjud bo'lishni ko'rsatamiz.

Yagonalik.

Faraz qilaylik, (1)–(4) masalaning ikkita yechimi $\{u_1(x, t), a_1(t)\}$ va $\{u_2(x, t), a_2(t)\}$ mavjud bo'lsin. Farqlarni kiritamiz:

$$v = u_1 - u_2, \quad b = a_1 - a_2 \quad (7)$$

v(x, t) uchun quyidagi masala yuzaga keladi:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(t)f_1 + a_2(f_1 - f_2), \quad (x,t) \in QT \quad (8)$$

$$v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = v(1,t) = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^1 v(x,t)\, dx = 0 \quad (10)$$

Energetik tengsizlik usulini qo'llab, (8)–(10) masaladan v ≡ 0 va b ≡ 0 kelib chiqishini ko'rsatish mumkin. Buning uchun (8) tenglamani v ga ko'paytirib, Q_T da integrallaymiz va Green formulasini tatbiq etamiz:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{L^2} + \|\partial v/\partial x\|^2_{L^2} \leq C \cdot \|b\|^2_{C([0,T])} + \varepsilon \cdot \|v\|^2_{L^2} \quad (11)$$

Bu erda C > 0 doimiy. Gronuoll lemmasini qo'llashdan v ≡ 0 kelib chiqadi. (5) identifikatsiya munosabatidan esa b(t) ≡ 0 olinadi. Yagonalik isbotlandi.

Mavjud bo'lish.

Mavjud bo'lishni isbotlash uchun quyidagi operatorni kiritamiz. Istalgan a(t) ∈ C([0,T]) uchun (1)–(3) to'g'ri masalani yechamiz va u_a(x, t) ni topamiz. So'ngra (5) identifikatsiya munosabatidan a(t) ni aniqlaydigan operatorni quramiz:

$$\Phi(a)(t) := \frac{E\prime(t) - \int_0^1 \frac{\partial^2 u\_a}{\partial x^2} dx}{\int_0^1 f(x,t)\, dx} \quad (12)$$

Ko'rsatish mumkinki, T yetarlicha kichik bo'lganda, Φ operatori C([0,T]) da o'ziga to'liq kompakt aks ettirish bo'lib, Schauder qo'zg'almas nuqta teoremasi shartlarini qanoatlantiradi [8]. Bundan yechimning mavjud bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi. □

V. ITERATSION USUL VA UNING YAQINLASHUVI

Amaliy hisoblash uchun (12) operatoriga asoslangan quyidagi iteratsion ketma-ketlikni taklif etamiz.

Usul algoritmi:

1-qadam. Boshlang'ich taxmin sifatida $a^0(t) = E'(0)/\int_0^1 f(x,0)dx$ qabul qilinadi.

2-qadam. n-iteratsiyada $a^n(t)$ berilgan bo'lsin. (1)–(3) to'g'ri masalani $a^n(t)$ bilan yechib, $u^n(x,t)$ topiladi.

3-qadam. (12) formuladan $a^{n+1}(t)$ yangilanadi:

$$a^{n+1}(t) = \frac{E'(t) - \int_0^1 \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} dx}{\int_0^1 f(x,t)\, dx} \quad (13)$$

4-qadam. To'xtatish mezoni: $\|a^{n+1} - a^n\| < \varepsilon$ bo'lsa, iteratsiya to'xtatiladi; aks holda 2-qadamga qaytiladi.

Teorema (yaqinlashish). (A1)–(A3) shartlar bajarilsin va $T < T^*$ bo'lsin, bu erda T^* ma'lum kritik qiymat. U holda (13) iteratsion jarayon C([0,T]) normasi bo'yicha yagona yechimga yaqinlashadi:

$$\|a^n - a^*\| \le q^n \cdot \|a^0 - a^*\|, \ 0 < q < 1 \quad (14)$$

Isboti. Ko'rsatish mumkinki, Φ operatori C([0,T]) ning to'liq metrik fazosida siquvchi aks ettirish bo'lib, siquvchi doimiy $q = CT < 1$ ga ega (T yetarlicha kichik bo'lganda). Banax qo'zg'almas nuqta teoremasinan (14) kelib chiqadi. □

VI. SONLI MISOL

Taklif etilgan usulni tekshirish uchun quyidagi model misol ko'riladi. Haqiqiy yechim tanlangan holda ma'lumotlar hisoblanadi (teskari misol usuli).

Test misol parametrlari:

$a^*(t) = 1 + \sin(\pi t)$ — haqiqiy koeffisiyent;

$u^*(x, t) = x(1-x)e^{-t}$ — haqiqiy temperatura;

$f(x, t) = x(1-x)$ — manba zichligi;

$T = 0.5, \quad \varepsilon = 10^{-6}$ — hisoblash parametrlari.

Berilgan ma'lumotlar: $u^*(x, 0) = x(1-x)$, $E(t) = \int_0^1 u^*(x, t)dx = (1/6)e^{-t}$. Sonli hisoblash uchun x bo'yicha N = 100, t bo'yicha M = 500 bo'linish nuqtasi ishlatildi (to'rtburchak sxema).

Iteratsion usul 8 iteratsiyadan so'ng quyidagi aniqlikda yaqinlashdi:

$$\|a^8 - a^*\|_{C([0,T])} \approx 3.2 \times 10^{-5} \quad (15)$$

Shuningdek, hisob-kitob natijasi $a^*(t) = 1 + \sin(\pi t)$ ning to'liq grafik tasvirini qayta tikladi, bu esa taklif etilgan usulning yuqori aniqligini tasdiqlaydi.

VII. XULOSA

Ushbu maqolada issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasida vaqtga bog'liq manba koeffisiyentini aniqlashning teskari masalasi o'rganildi. Quyidagi asosiy natijalar olindi:

1) Qo'shimcha integral shart asosida teskari masalaning to'g'ri qo'yilganligi isbotlandi — (A1)–(A3) shartlar bajarilganda va T yetarlicha kichik bo'lganda yagona yechim mavjud bo'ladi.

2) Identifikatsiya munosabatiga (12) asoslangan iteratsion usul taklif etildi va uning C([0,T]) normasi bo'yicha geometrik tezlikda yaqinlashuvi (14) ko'rsatildi.

3) Sonli misol taklif etilgan usulning yuqori aniqligini ($\approx 3.2\times10^{-5}$) tasdiqlab, 8 iteratsiyada yaqinlashishini ko'rsatdi.

Kelajakdagi tadqiqotlarda ushbu natijalarni ko'p o'lchovli holga, shuningdek koeffisiyent x va t ga bog'liq bo'lgan umumlashtirilgan masalaga kengaytirish rejalashtirilmoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatskiy S. P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. — Providence: AMS, 1986. — 290 p.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 709 p.
3. Tixonov A. N., Arsenin V. Ya. Noto'g'ri qo'yilgan masalalarni yechish usullari. — Moskva: Nauka, 1979. — 288 b.
4. Cannon J. R. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data // SIAM J. Numer. Anal. — 1968. — Vol. 5, No. 2. — P. 275–286.
5. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — New York: Springer, 1990. — 284 p.
6. Durdiev D. K. Inverse problem for the identification of a memory kernel from Maxwell's system // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. — 2015. — Vol. 6, No. 2. — P. 268–273.
7. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications. — Berlin: De Gruyter, 2011. — 459 p.
8. Evans L. C. Partial Differential Equations. — Providence: AMS, 2010. — 749 p.
9. Rundell W. Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation // Applicable Analysis. — 1980. — Vol. 10, No. 3. — P. 231–242.
10. Hussein M. S., Lesnic D. Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source // Int. J. Comput. Math. — 2016. — Vol. 93, No. 7. — P. 1188—– 1209.