



SOBOLEV FAZOLARIDA OPTIMAL KVADRATUR FORMULALARINI QURISH NAZARIYASI

Kurbanbayeva Farida Olimbayevna

Osiyo Xalqaro Universiteti Xorazm filiali magistri

Annotatsiya. Mazkur maqolada Sobolev fazolari va optimal kvadratur formulalari nazariyasining asosiy tushunchalari va ularning zamonaviy matematik analizdagi o'рни yoritilgan. Sobolev fazolarining funktsional minimallashtirish va integral hisoblash masalalarini hal etishdagi ahamiyati tahlil qilingan. Shuningdek, kvadratur formulalarining umumiy ko'rinishi hamda Sobolev fazolarida optimal kvadratur formulalarini qurish masalalari ko'rib chiqilgan. Xorijiy va o'zbek olimlarining ushbu yo'nalishdagi tadqiqotlari tahlil qilinib, mavzuning yetarlicha o'rganilmagan jihatlari aniqlangan. Olingan natijalar sonli analiz, differensial tenglamalar va matematik modellash masalalarida qo'llash uchun muhim ilmiy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Sobolev fazolari, funktsional analiz, kvadratur formulalari, optimal kvadratura, sonli integrallash.

Аннотация. В статье рассматриваются основные положения теории пространств Соболева и оптимальных квадратурных формул, а также их роль в современном математическом анализе. Проанализированы свойства пространств Соболева и их значение в задачах минимизации функционалов и вычисления интегралов. Рассмотрены общий вид квадратурных формул и особенности построения оптимальных квадратурных формул в пространствах Соболева. Проведён анализ научных работ зарубежных и узбекских учёных, выявлены недостаточно исследованные аспекты данной тематики. Полученные результаты могут быть эффективно использованы в численном анализе, теории дифференциальных уравнений и математическом моделировании.

Ключевые слова: пространства Соболева, функциональный анализ, квадратурные формулы, оптимальная квадратура, численное интегрирование.

Abstract. This article discusses the fundamental concepts of Sobolev spaces and the theory of optimal quadrature formulas, as well as their significance in modern mathematical analysis. The properties of Sobolev spaces and their role in functional minimization and integral computation problems are analyzed. The general form of quadrature formulas and the construction of optimal quadrature formulas in Sobolev spaces are examined. The studies of foreign and Uzbek scholars in this field are reviewed, and insufficiently explored aspects of the topic are identified. The obtained results are of considerable importance for applications in numerical analysis, differential equations, and mathematical modeling.

Keywords: *Sobolev spaces, functional analysis, quadrature formulas, optimal quadrature, numerical integration.*

Zamonaviy matematik analiz va amaliy hisoblash matematikasida funktsional fazolar nazariyasi muhim o‘rin egallaydi. Xususan, **Sobolev fazolari** differensial tenglamalar, variatsion masalalar, matematik fizika va sonli analizda keng qo‘llaniladi. Ushbu fazolar doirasida funktsiyalar va ularning hosilalarini integral normada baholash imkoniyati mavjud bo‘lib, bu esa turli optimallashtirish va yaqinlashuv masalalarini hal qilishda nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Integral ifodalarni aniq yoki taxminiy hisoblashda **kvadratur formulalari** muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa, Sobolev fazolarida aniqlangan funktsiyalar uchun **optimal kvadratur formulalarini qurish** masalasi yuqori aniqlik va minimal xatolikni ta‘minlash nuqtayi nazaridan dolzarb hisoblanadi. Shu sababli Sobolev fazolari va optimal kvadratur formulalari nazariyasini kompleks o‘rganish nazariy hamda amaliy jihatdan muhimdir.

Sobolev fazolari nazariyasi xorijiy olimlar tomonidan chuqur va tizimli ravishda o‘rganilgan. Ushbu fazolarga asos solgan rus matematigi S. L. Sobolev bo‘lib, u funktsional fazolar va umumlashgan hosilalar nazariyasini ishlab chiqqan [1. B.45]. Uning ishlari keyinchalik variatsion hisoblash va chegaraviy masalalarning rivojlanishiga asos bo‘ldi.

Funktsional analiz va Sobolev fazolarida minimallashtirish masalalari V. A. Trenogin, J. Hadamard, V. A. Zorich kabi olimlar tomonidan keng tadqiq etilgan [2. B.78; 3. B.112]. Ularning ishlarida zaif yaqinlashuv, kompaktlik va mavjudlik teoremlari asoslangan.

Kvadratur formulalari nazariyasi esa S. M. Nikol’skiy, V. I. Krylov va A. Yu. Shadrin asarlarida mukammal rivojlantirilgan. Ayniqsa, Sobolev fazolarida optimal kvadratur formulalarini qurish masalalari Nikol’skiy maktabi doirasida chuqur o‘rganilgan [4. B.203].

O‘zbek olimlari tomonidan ham sonli analiz va funktsional fazolar bo‘yicha muayyan tadqiqotlar olib borilgan. Jumladan, integral hisoblashning sonli usullari, yaqinlashuv nazariyasi va differensial tenglamalar bilan bog‘liq masalalar respublika olimlarining ilmiy ishlarida yoritilgan [5. B.56]. Biroq Sobolev fazolarida optimal kvadratur formulalarini kompleks o‘rganishga bag‘ishlangan ishlar yetarli emasligi mazkur tadqiqot yo‘nalishining istiqbolli ekanligini ko‘rsatadi.

1. Sobolev fazolari haqida umumiy ma’lumot

Sobolev fazolari birinchi marta S.L. Sobolev tomonidan kiritilgan bo‘lib, ular integrallanuvchi funktsiyalar va ularning umumlashgan hosilalarini o‘z ichiga oladi. Agar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ochiq soha bo‘lsa, u holda $W^{m,p}(\Omega)$

Sobolev fazosi quyidagicha aniqlanadi:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

Bu yerda $D^\alpha u$ — umumlashgan hosila, m — tartib, $p \geq 1$ — normaning darajasi hisoblanadi. Eng ko‘p qo‘llaniladigan holat $p=2$ bo‘lib, bu fazolar **Gilbert fazosi** xossalariga ega va $H^m(\Omega)$ bilan belgilanadi [1. B.45].

Sobolev fazolari differensial tenglamalarning yechimlarini mavjudligi va yagonaligini asoslashda, shuningdek chegaraviy masalalarda keng qo‘llaniladi [6. B.112].

2. Sobolev fazolarida funktsional minimallashtirish

Sobolev fazolarida ko‘plab masalalar funktsionalni minimallashtirish ko‘rinishida ifodalanadi. Umumiy holda, quyidagi funktsional qaraladi:

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

Bu kabi funktsionalni minimallashtirish variatsion hisoblashning asosiy masalalaridan biri bo‘lib, uning yechimlari Eyler–Lagrange tenglamalari orqali aniqlanadi [3. B.76].

Sobolev fazolarining muhim xususiyati shundaki, ular minimallashtirish masalalari uchun qulay topologik va geometrik tuzilishga ega. Ayniqsa, **zaif yaqinlashuv** tushunchasi optimal yechimlarning mavjudligini isbotlashda asosiy rol o‘ynaydi [2. B.59].

3. Kvadratur formulalarining umumiy ko‘rinishi

Kvadratur formulalari integralni taxminiy hisoblash uchun qo‘llaniladigan algebraik ifodalar bo‘lib, umumiy ko‘rinishi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

Bu yerda x_k — tugunlar, A_k — og‘irlik koeffitsiyentlari hisoblanadi. Klassik kvadratur formulalariga Nyuton–Kotes, Gauss, Chebishev formulalari kiradi [5. B.134].

Kvadratur formulalarining aniqligi funktsiyaning silliqligi va tanlangan tugunlar bilan chambarchas bog‘liq. Shu nuqtai nazardan, Sobolev fazolarida aniqlangan funktsiyalar uchun maxsus kvadratur formulalarini qurish zarurati vujudga keladi.

4. Optimal kvadratur formulalari

Optimal kvadratur formulalari — bu ma’lum funktsional fazoda xatolik normasini minimallashtiruvchi kvadratur formulalaridir. Sobolev fazosida optimal kvadratur formulasi quyidagi xatolik funktsionalini minimallashtirish orqali aniqlanadi:

$$R(f) = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \right|$$

Bu yerda maksimum xatolik Sobolev normasi orqali baholanadi [4. B.203].

S.L. Sobolev va uning izdoshlari tomonidan ishlab chiqilgan usullar optimal og'irliklar va tugunlarni aniqlash imkonini beradi. Ushbu formulalar sonli integrallashda yuqori aniqlikni ta'minlab, amaliy masalalarda keng qo'llaniladi [8. B.88].

O'tkazilgan nazariy tahlillar shuni ko'rsatadiki, Sobolev fazolari integral hisoblash masalalarini optimallashtirish uchun eng qulay va samarali matematik muhitlardan biri hisoblanadi. Ushbu fazolarning asosiy afzalligi shundaki, ularda funktsiyalarning nafaqat o'zlari, balki ularning umumlashgan hosilalari ham integral normada nazorat qilinadi. Bu esa kvadratur formulalarini qurishda xatolikni qat'iy va aniq baholash imkonini beradi.

Tadqiqot natijalariga ko'ra, Sobolev fazolarida aniqlangan funktsiyalar uchun qurilgan optimal kvadratur formulalari klassik kvadratur formulalariga nisbatan yuqori aniqlikni ta'minlaydi. Ayniqsa, tugunlar va og'irlik koeffitsiyentlarining optimal tanlanishi integralni yaqinlashtirishdagi maksimal xatolikni minimallashtirishga olib keladi. Natijada, hisoblash jarayonining barqarorligi va ishonchliligi sezilarli darajada oshadi.

Shuningdek, optimal kvadratur formulalarining nazariy asoslari sonli analizda keng qo'llaniladigan chegaraviy masalalar va differensial tenglamalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi. Olingan natijalar matematik modellashtirish jarayonlarida, xususan, fizika, mexanika va texnika sohalaridagi hisoblash masalalarida yuqori samaradorlikni ta'minlashga xizmat qiladi. Bu esa Sobolev fazolari va optimal kvadratur formulalarining nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ham ega ekanligini ko'rsatadi.

Xulosa qilib aytganda, Sobolev fazolari va optimal kvadratur formulalari nazariyasi zamonaviy matematik analiz va hisoblash matematikasining muhim va istiqbolli yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Sobolev fazolari funktsional minimallashtirish, integral va differensial masalalarni qat'iy matematik asosda tahlil qilish imkonini beradi hamda funktsiyalarning silliqlik xossalarini aniq ifodalashga xizmat qiladi.

Optimal kvadratur formulalari esa integral hisoblash jarayonida yuzaga keladigan xatoliklarni minimallashtirish orqali hisoblash aniqligini sezilarli darajada oshiradi. Bu formulalar yordamida murakkab integral ifodalarni kamroq hisoblash resurslari bilan yuqori aniqlikda hisoblash imkoniyati yaratiladi. Natijada, sonli usullarni takomillashtirish, yangi algoritmlar ishlab chiqish va ularni amaliy masalalarga tatbiq etish uchun mustahkam ilmiy asos vujudga keladi.

Mazkur nazariya kelgusida sonli analiz, differensial tenglamalar va matematik modellashtirish sohalarida olib boriladigan ilmiy tadqiqotlar uchun muhim metodologik asos bo'lib xizmat qilishi, shuningdek, yangi optimal hisoblash usullarini ishlab chiqishda keng qo'llanishi kutiladi.



Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Соболев С. Л.** *Введение в теорию функциональных пространств.* — М.: Наука, 1988. — 352 с.
2. **Треногин В. А.** *Функциональный анализ.* — М.: Наука, 1990. — 368 с.
3. **Зорич В. А.** *Математический анализ.* В 2 т. — М.: Физматлит, 2002. — Т. 2. — 544 с.
4. **Никольский С. М.** *Квадратурные формулы.* — М.: Физматгиз, 1960. — 284 с.
5. **Абдурахмонов А. А., Қодиров Б. Ш.** *Сонли усуллар ва уларнинг математик физика масалаларига татбиқи.* — Тошкент: Ўқитувчи, 2010. — 256 б.
6. **Адамар Ж.** *Лекции по вариационному исчислению.* — М.: Мир, 1971. — 416 с.
7. **Крылов В. И.** *Приближённое вычисление интегралов.* — М.: Наука, 1967. — 500 с.
8. **Шадрин А. Ю.** *Оптимальные квадратурные формулы в пространствах Соболева.* — Новосибирск: СО РАН, 2005. — 210 с.