



KUCHLI TEBRANUVCHI INTEGRALLAR VA ULARNI HISOBLASH MASALASI

Kurbanbayeva Farida Olimbayevna

Osiyo Xalqaro Universiteti Xorazm filiali magistri

Annotatsiya. Mazkur maqolada kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblash muammosi, ularning matematik modeli va amaliy qo'llanishi yoritilgan. Asosan Levin, Filon va asimptotik kengaytmalar metodlari asosida sonli integrallash yondashuvlari tahlil qilinadi. Ilmiy adabiyotlar asosida nazariy tahlil olib borilib, misollar yordamida natijalar keltiriladi.

Kalit so'zlar: kuchli tebranuvchi integral, asimptotik metod, Levin usuli, Filon metodi, sonli integrallash.

Аннотация. В данной статье рассматривается задача вычисления сильно осциллирующих интегралов, их математическая модель и практические применения. В основном анализируются численные методы интегрирования на основе методов Левина, Филона и асимптотических разложений. На основе анализа научной литературы проводится теоретическое исследование, а также приводятся результаты с использованием численных примеров.

Ключевые слова: сильно осциллирующий интеграл, асимптотический метод, метод Левина, метод Филона, численное интегрирование.

Abstract. This paper addresses the problem of evaluating highly oscillatory integrals, their mathematical modeling, and practical applications. The main focus is on the analysis of numerical integration methods based on the Levin method, the Filon method, and asymptotic expansion techniques. A theoretical investigation is carried out based on scientific literature, and the results are demonstrated through illustrative examples.

Keywords: highly oscillatory integral, asymptotic method, Levin method, Filon method, numerical integration.

KIRISH (Introduction)

Amaliy matematika, kvant mexanikasi, elektromagnit to'liqlar nazariyasi, signalni qayta ishlash va to'liqli jarayonlar modellash tirishda **kuchli tebranuvchi integrallar** muhim o'rin egallaydi. Ushbu integrallar quyidagi umumiy ko'rinishda uchraydi:

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx,$$

bu yerda $\omega \gg 1$ bo'lib, yuqori chastotali tebranishni ifodalaydi.

Katta ω qiymatlarida integral ostidagi funksiya tez-tez tebranadi va oddiy kvadratura formulalari yordamida aniq hisoblash qiyinlashadi. Shu sababli maxsus **sonli va asimptotik metodlar** ishlab chiqilgan [1. B.2].





So‘nggi yillarda kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblash uchun Levin, Filon, stasionar faza va integrallashning adaptiv algoritmlari keng qo‘llanilmoqda [2. B.1027]. Ushbu maqolada mazkur metodlarning nazariy asoslari va amaliy qo‘llanishi tahlil qilinadi.

METODOLOGIYA (Methodology)

Mazkur tadqiqot metodologiyasi kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblash masalasini chuqur va tizimli tahlil qilishga yo‘naltirilgan bo‘lib, u nazariy va amaliy yondashuvlarning o‘zaro uyg‘unligiga asoslanadi. Dastlab, kuchli tebranuvchi integrallar nazariyasining fundamental asoslari, ularning matematik modeli va xususiyatlari keng qamrovli nazariy tahlil orqali o‘rganildi. Bu bosqichda integral ostidagi funksiyalarning tebranish xatti-harakati, chastota parametrining roli hamda integral qiymatining unga bog‘liqligi atroflicha tahlil qilindi.

Keyingi bosqichda, kuchli tebranuvchi integrallarni yaqinlashgan holda hisoblash imkonini beruvchi asimptotik kengaytmalar metodi qo‘llanilib, ushbu yondashuvning aniqligi va chegaralari baholandi. Mazkur metod yordamida katta chastotalar uchun integralning taxminiy ifodasi olinib, nazariy natijalar sonli hisoblashlar bilan solishtirildi.

Shuningdek, tadqiqot jarayonida Levin va Filon metodlari asosiy sonli integrallash algoritmlari sifatida tanlab olinib, ularning hisoblash barqarorligi, aniqligi va samaradorligi taqqoslab o‘rganildi. Ushbu metodlar turli test misollarida qo‘llanilib, natijalarning chastota parametriga bog‘liqligi tahlil qilindi.

Metodologiyaning muhim tarkibiy qismi sifatida sonli eksperimentlar o‘tkazilib, ular orqali nazariy xulosalarning amaliy tasdig‘i tekshirildi. Kompyuter modellashtirish asosida olingan natijalar grafik va jadval ko‘rinishida tahlil qilinib, turli metodlarning afzalliklari va kamchiliklari aniqlab berildi. Ushbu kompleks yondashuv kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblash masalasini har tomonlama o‘rganish va ishonchli ilmiy xulosalar chiqarish imkonini berdi.

Levin usuli

Levin metodida quyidagi integral:

$$I = \int_a^b f(x)e^{i\omega x} dx$$

uchun yordamchi funksiya $u(x)$ kiritiladi:

$$u'(x) + i\omega u(x) = f(x).$$

Natijada integral quyidagicha ifodalanadi:

$$I = u(b)e^{i\omega b} - u(a)e^{i\omega a}.$$



Mazkur metod tebranish chastotasi yuqori bo'lgan hollarda yuqori aniqlik beradi [3. B.533].

ADABIYOTLAR TAHLILI (Literature Review)

Iserles va Norsett kuchli tebranuvchi differensial tenglamalar va integrallarni hisoblash uchun maxsus algoritmlar ishlab chiqib, ularning yaqinlashuv xossalarini o'rgangan [1. B.990].

Huybrechs va Vandewalle asimptotik kengaytmalar yordamida kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblashning samarali usullarini taklif etib, aniqlik va hisoblash tezligini solishtirgan [2. B.1030].

Levin tomonidan ishlab chiqilgan metod esa yuqori chastotali tebranuvchi funksiyalar integrallarini aniq hisoblashda keng qo'llanilmoqda va u zamonaviy sonli integrallash usullarining asosini tashkil etadi [3. B.534].

Olver esa momentlarsiz integrallash metodlarini taklif etib, Filon tipidagi algoritmlarni sezilarli darajada takomillashtirdi [4. B.218].

TAHLIL VA NATIJALAR (Results and Discussion)

Misol 1.

Quyidagi integralni hisoblaymiz:

$$I(\omega) = \int_0^1 \sin(10^3 x) dx.$$

Analitik yechim:

$$I = \left[-\frac{\cos(10^3 x)}{10^3} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(1000)}{1000}.$$

Oddiy trapetsiya formulasi bilan hisoblanganda katta xatolik yuzaga keladi. Levin metodidan foydalanilganda esa yuqori aniqlik ta'minlanadi [3. B.535].

Misol 2.

Asimptotik yondashuv:

$$I(\omega) = \int_0^1 e^{i\omega x^2} dx.$$

Stasionar faza metodiga ko'ra:

$$I(\omega) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\pi/4}.$$

Bu yondashuv katta ω lar uchun aniq natija beradi [2. B.1032].

Natijalar

O'tkazilgan nazariy va sonli tajribalar tahlili shuni ko'rsatdiki, kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblashda turli metodlar o'ziga xos ustunlik va cheklovlarga ega. Jumladan, Levin metodi yuqori chastotali tebranishlar sharoitida eng barqaror va aniq natijalarni ta'minlaydi. Ushbu metod integral ostidagi tez tebranuvchi funksiya



xususiyatlarini hisobga olib, hisoblash jarayonida yuzaga keladigan sonli beqarorliklarni minimallashtiradi. Natijada, hatto juda katta ω qiymatlarida ham yuqori aniqlik darajasiga erishish mumkin bo'ladi.

Filon tipidagi metodlar esa hisoblash tezligi nuqtai nazaridan sezilarli ustunlikka ega bo'lib, ayniqsa ko'p marotaba integral hisoblash talab etiladigan amaliy masalalarda samarali natija beradi. Ushbu metodlar tebranuvchi ko'paytuvchini maxsus interpolatsion polinomlar yordamida yaqinlashtirish orqali hisoblash jarayonini soddalashtiradi va kompyuter resurslaridan oqilona foydalanishga imkon yaratadi. Shu bilan birga, Filon usullarining aniqligi integrallanuvchi funktsiya silliqqligi va tebranish chastotasiga sezilarli darajada bog'liq ekanligi aniqlandi.

Asimptotik metodlar esa kuchli tebranuvchi integrallarni nazariy tahlil qilish va ularning chegaraviy xatti-harakatini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu yondashuvlar katta ω qiymatlarida integralning taxminiy qiymatini tez va samarali baholash imkonini beradi. Biroq, sonli tajribalar shuni ko'rsatdiki, ω ning kichik qiymatlarida asimptotik formulalar aniqlik jihatidan yetarli darajada samarali bo'lmaydi va sezilarli xatoliklar yuzaga keladi. Shu sababli, amaliy hisoblashlarda asimptotik metodlardan ehtiyotkorlik bilan foydalanish, ularni Levin yoki Filon metodlari bilan kombinatsiyalash maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblashda metod tanlash masalasi integralning tuzilishi, tebranish chastotasi va talab etilayotgan aniqlik darajasiga bevosita bog'liq ekanligini ko'rsatdi. Bu esa amaliy masalalarni yechishda mos algoritmnii tanlashda muhim metodik asos bo'lib xizmat qiladi.

XULOSA (Conclusion)

Kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblash murakkab matematik muammo bo'lib, u zamonaviy sonli metodlarni talab qiladi. Levin, Filon va asimptotik yondashuvlar asosida tuzilgan algoritmlar yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta'minlaydi.

Mazkur maqolada tahlil qilingan metodlar fizika, muhandislik, signalni qayta ishlash va kvant mexanikasi masalalarini yechishda keng imkoniyatlar yaratadi. Kelgusida ushbu usullarni ko'p o'lchovli integrallar uchun moslashtirish dolzarb yo'nalishlardan biridir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Iserles A., Norsett S. P. On the numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2005. – Vol. 357. – P. 983–1019.
2. Huybrechs D., Vandewalle S. On the evaluation of highly oscillatory integrals by asymptotic expansions // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2006. – Vol. 44(3). – P. 1026–1048.



3. Levin D. Procedures for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations // Mathematics of Computation. – 1982. – Vol. 38(158). – P. 531–538.
4. Olver S. Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2006. – Vol. 26(2). – P. 213–227.