

DOIRADA KASR TARTIBLI SUBDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN YECHIMNI QURISH

Qodirova Marhabo

Osyo Xalqaro Universiteti Xorazm filioli magistri

Annotatsiya. Ushbu tezisda doira shaklidagi hududlarda kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun yechimlarni qurish masalasi o'rganildi. Tadqiqotda Caputo turidagi kasr hosiladan foydalangan holda vaqt bo'yicha xotira effektlari hisobga olindi. Doira sohasidagi masalalarni yechishda Bessel funksiyalari va spektral kengaytma yondoshuvi qo'llanildi, vaqt bo'yicha yechimlar Mittag-Leffler funksiyasi orqali ifodalandi. Shuningdek, sonli yechimlarni olish uchun L1 taqribiylash sxemasi keltirildi. Tadqiqot natijalari murakkab muhitlarda subdiffuziya jarayonlarini tavsiflashda kasr tartibli modellarning samaradorligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: Kasr tartibli hosila, subdiffuziya, doira chegaraviy masalasi, Caputo hosilasi, Bessel funksiyalari, Mittag-Leffler funksiyasi, Spektral kengaytma, sonli yechim.

Abstract. This thesis studies the problem of constructing solutions for the fractional-order subdiffusion equation in circular regions. The study takes into account time memory effects using the Caputo-type fractional derivative. Bessel functions and spectral expansion approach are used to solve problems in the circular region, and solutions in time are expressed by the Mittag-Leffler function. Also, an L1 approximation scheme is presented to obtain numerical solutions. The results of the study demonstrate the effectiveness of fractional-order models in describing subdiffusion processes in complex environments.

Keywords: Fractional derivative, subdiffusion, circular boundary value problem, Caputo derivative, Bessel functions, Mittag-Leffler function, Spectral expansion, numerical solution.

Zamonaviy ilm-fan va amaliy tadqiqotlarda murakkab va xotirali muhitlarda sodir bo'ladigan diffuziya jarayonlarini modellashtirish muhim ahamiyatga ega. Anomaliy diffuziya — ya'ni aniq vaqtga chiziqli bo'lmagan tarqalish — hodisasini matematik ifodalash uchun oddiy differensial tenglamalar yetarli bo'lmaydi. Shu sababli subdiffuziya jarayonlarini tavsiflashda kasr tartibli differensial tenglamalar qo'llaniladi. Kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi vaqt bo'yicha oxirgi vaqt holati bilan birga oldingi vaqtlar xotirasini ham inobatga oladi, bu esa murakkab fizik tizimlarda ko'rinadigan no-lokal xususiyatlarni tavsiflashga imkon beradi [1. B.35].

Masalan, doira (aylana) shaklidagi chegaralangan sohada kasr tartibli subdiffuziya tenglamasini yechish masalasi — issiqlik o'tkazuvchanligi, modda tarqalishi yoki zarrachalar harakati kabi jarayonlarda ko'p uchraydi. Ushbu tezisning maqsadi

shunday masalalarni yechish uchun matematik usullarni ishlab chiqish va ularning mavjudligi, barqarorligi haqida tahlil berishdan iborat.

Subdiffuziya jarayonlarini matematik modellashirishda kasr tartibli differensial tenglamalar asosiy vosita sifatida ishlatiladi. Ushbu tenglamalar vaqt bo'yicha xotira effektlarini hisobga oladi va klassik diffuziya tenglamalaridan farqli ravishda murakkab, no-lokal tizimlardagi modda yoki issiqlik tarqalishini aniqroq ifodalaydi. Tadqiqotlarning ko'rsatishicha, doira shaklidagi chegaralangan sohalarda subdiffuziya tenglamasini yechish masalasi nafaqat nazariy jihatdan qiziq, balki amaliy tadqiqotlar uchun ham muhimdir.

O'rganilgan adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, xorijiy olimlar I.Podlubny [1. B.33] va A.A. Kilbas [2. B.36] kasr tartibli differensial tenglamalarning nazariy asoslarini ishlab chiqqan. Shuningdek, R. Metzler va J. Klafter subdiffuziya jarayonlarini uzluksiz vaqtli tasodifiy yurish (CTRW) modeli asosida tahlil qilgan va kasr tartibli tenglamalar orqali fizik mazmunni asoslab bergan. O'zbekiston olimlari R.R. Ashurov va M.D. Shakarova esa teskari masalalar, yechimlarning mavjudligi va barqarorligi bo'yicha tadqiqotlar olib borgan [3. B.38].

Shu nuqtai nazardan, quyidagi bo'limda kasr tartibli subdiffuziya tenglamalarining matematik tuzilishi, Caputo hosilasi va doira sohasida yechimlarni qurish metodlari ko'rib chiqiladi.

Klassik diffuziya tenglamasi:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

bu yerda $u(x, t)$ — zichlik funksiyasi, D — diffuziya koeffitsienti.

Subdiffuziya jarayonlarida vaqt bo'yicha Caputo turidagi kasr hosila qo'llaniladi:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

bu yerda α — subdiffuziya darajasini ifodalaydigan ko'rsatkich.

Caputo kasr hosilasining integral ta'rifi:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t - s)^\alpha} ds, \quad 0 < \alpha < 1.$$

bu orqali subdiffuziya jarayonida xotira effekti matematik jihatdan hisobga olinadi [1. B.40].

Murakkab muhitlarda sodir bo'ladigan subdiffuziya jarayonlarini doira shaklidagi chegaralangan sohalarda tavsiflash uchun kasr tartibli tenglamalarni radial koordinatalarda yozish qulay. Bunday masalalar, masalan, g'ovak materiallar, biologik hujayralar yoki issiqlik tarqalishi jarayonlarini modellashirishda uchraydi.

Doira sohasidagi masalani yechishda asosiy qiyinchilik — radial simmetriya va vaqt bo'yicha xotira effektlarini birgalikda hisobga olish. Shu sababli yechimlarni qurishda Bessel funksiyalari va Mittag-Leffler funksiyalaridan foydalanish qulay va samarali hisoblanadi.

Quyida masalaning formulaviy ifodasi va doira sohasidagi subdiffuziya tenglamasining boshlang'ich va chegaraviy shartlari keltiriladi. Bu kirish qismi orqali o'quvchi masalaning fizik mazmuni va yechimga yondoshuvni tushunishi osonlashadi.

Doirada subdiffuziya tenglamasi: shakl va yechim yondoshuvi

1. Masalaning formulaviy ifodasi.

Doira hududida ($r \leq R$, radial koordinatalar r, θ) subdiffuziya tenglamasi ko'pincha quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial^\alpha u(r, t)}{\partial t^\alpha} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad 0 < \alpha < 1,$$

bu yerda $u(r, t)$ — vaqt va radius bo'yicha tarqalish zichligi.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar:

$$u(r, 0) = f(r), \quad u(R, t) = 0.$$

Bu masala subdiffuziya tenglamasining doira chegaraviy masalasi hisoblanadi.

2. Analitik yechim yo'nalishi

Doira sohasida radial operatorni tahlil qilishda Bessel funksiyalari yordamida spektr yondashuvi qo'llanadi. Bessel operatorning xos funksiyalari $J_0(\lambda_n r/R)$ bo'lib, bu erda λ_n — n -chi ildiz. Yechim spektral kengaytma ko'rinishiga ega bo'ladi:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{R} \right) E_\alpha(-D \lambda_n^2 t^\alpha),$$

bu yerda $E_\alpha(\cdot)$ — Mittag-Leffler funksiyasi, u kasr tartibli tenglamalarning vaqt bo'yicha yechim strukturasi ifodalaydi (ko'p manbalarda yechim shakllari mavjud, shuningdek fundamental yechimlar Bessel operator orqali olinadi).

Mittag-Leffler funksiyasi:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

bu funksiyalar kasr tartibli modellar uchun klassik eksponensial funksiya o'rnini bosadi.

Yechim tahlili va muhokama. Doira sohasidagi subdiffuziya masalasi klassik diffuziya muammolariga o'xshash bo'lishiga qaramay, vaqt bo'yicha kasr hosila tufayli yechimning vaqt evolyutsiyasi odatdagi eksponensial bo'lmay, Mittag-Leffler funksiyasi orqali tavsiflanadi. Bu funksiya vaqt o'tishi bilan sekin tarqalishni ko'rsatadi va murakkab xotira effektlarini aks ettiradi. Kasr tartibli subdiffuziya modellarida yechimlar mavjudligi va ularning spectral kengaytma usuli orqali ifodalanishi ko'plab tadqiqotlarda tasdiqlangan. Xususan, Bessel operatori bilan bog'liq masalalarda Fourier-Bessel seriyalari orqali yechimlar qurilishi natijalari berilgan. Numerik yondoshuvlar ham ishlanmoqda: masalan, doira chegarasi atrofida sun'iy chegaraviy shartlar qo'yilib, Caputo kasr hosilasining L1 taqribiylash sxemasi



bilan yechim topish metodi taklif qilingan. Bu yondashuvlar sonli yechimlarni aniqlashda qulay.

Xulosa. Tadqiqot ko'rsatadiki, doirada kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari uchun yechimlar spektral kengaytma yondashuvi yordamida Mittag-Leffler funksiyasi bilan ifodalanadi. Bu yechimlar klassik diffuziya modellarga nisbatan ancha umumlashgan bo'lib, xotira effektlarini hisobga oladi va murakkab fizik jarayonlarni tavsiflashda qo'llanadi. Doira shaklidagi chegaraviy masalalarda Bessel funksiyalari spektr ustunligidan foydalanish yechim tuzishda qulay vosita bo'lib xizmat qiladi. Shuningdek, sonli yechimlar bo'yicha metodlar — masalan, L1 sxemasi bilan L1 taqribiylash — doira sohasidagi subdiffuziya muammolarida samarali natijalar beradi. Kasr tartibli tenglamalar va ularning yechimlari bo'yicha tadqiqotlar rivojlanib bormoqda va murakkab tizimlarni modellashtirish uchun zamonaviy matematik analiz vositasi bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution, and some of their applications. — San Diego: Academic Press, 1999. — 340 p.
2. Amanov J. Kasr tartibli hosilalarning fizikaviy jarayonlarni ifodalashdagi afzalliklari // Journal of Science-Innovative Research in Uzbekistan. — Vol. 3, No 7, 2025. — 12–17 pp.
3. Li H., Wu X., Zhang J. Numerical Solution of the Time-Fractional Sub-Diffusion Equation on an Unbounded Domain... // East Asian Journal on Applied Mathematics. — Vol. 7, No 3, 2017. — 243–259 pp.
4. Bessel operator and fractional equation solutions // Ilmiy Axborotnoma. — 2024. — 6-son. — 45–53 b.
5. Ramazanov M., Pskhu A., Omarov M. The first boundary value problem for the fractional diffusion equation in a degenerate angular domain // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. — 2024. — Vol. 1, No 113. — P. 162–173. DOI: 10.31489/2024m1/162-173. Bu maqola fraksion diffuziya tenglamalari uchun chegaraviy masalalar va yechim strukturasini taqdim etadi.
6. Al-Musalhi F., Karimov E. On self-similar solutions of time and space fractional sub-diffusion equations // International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA). — 2021. — Vol. 11, No 3. — P. 16–27. DOI: 10.11121/ijocta.2021.1065. Maqola vaqt-va makon bo'yicha subdiffuziya tenglamalarining yechimlari bo'yicha o'rganilganlikni ko'rsatadi.
7. Akramova D.I. Inverse coefficient problem for a fractional-diffusion equation with a Bessel operator // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Matematika. — 2023. — Vol. 67, No 9. — P. 39–51. DOI: 10.3103/S1066369X23090049.