

FOKSNING H -FUNKSIYASI VA UNING BA'ZI XUSUSIY HOLLARINING ASIMPTOTIKALARI

Gulboyeva Shaxnoza Anvarovna

Osiyo xalqaro universiteti magistranti

Annotatsiya. *Ushbu tezis umumlashgan maxsus funksiyalardan biri bo'lgan Foksning H -funksiyasi va uning ayrim muhim xususiy hollari uchun asimptotik baholash masalalariga bag'ishlangan. Foksning H -funksiyasi ko'plab maxsus funksiyalarni, jumladan, Meijerning G -funksiyasi, Mittag-Leffler funksiyalari hamda gipergeometrik funksiyalarni yagona integral ko'rinishda umumlashtirishi bilan ajralib turadi. Tezisdagi ushbu funksiyaning ta'rif, asosiy analitik xossalari va parametrlar sohasiga bog'liq holda asimptotik xulq-atvori o'rganiladi. Shuningdek, ayrim xususiy hollarda asimptotik formulalar chiqarilib, ularning matematik fizika va kasr tartibli differensial tenglamalardagi ahamiyati yoritiladi.*

Kalit so'zlar: *Foksning H -funksiyasi, Meijer G -funksiyasi, asimptotik baholash, Mellin–Barnes integrali, maxsus funksiyalar, kompleks analiz.*

Abstract. *This thesis is devoted to the asymptotic evaluation of Fox's H -function, one of the generalized special functions, and some of its important special cases. Fox's H -function is distinguished by the fact that it generalizes many special functions, including Meijer's G -function, Mittag-Leffler functions, and hypergeometric functions, into a single integral form. The thesis studies the definition of this function, its main analytical properties, and its asymptotic behavior depending on the parameter domain. Also, asymptotic formulas are derived in some special cases, and their significance in mathematical physics and fractional differential equations is highlighted.*

Keywords: *Fox's H -function, Meijer G -function, asymptotic evaluation, Mellin–Barnes integral, special functions, complex analysis.*

Kirish. Zamonaviy matematik analiz va uning amaliy tatbiqlarida maxsus funksiyalar muhim o'rin tutadi. Ayniqsa, matematik fizika, ehtimollar nazariyasi, kasr tartibli differensial tenglamalar va integral tenglamalar nazariyasida uchraydigan murakkab masalalarni yechishda umumlashgan maxsus funksiyalardan foydalanish tobora kengayib bormoqda. Shu nuqtai nazardan, Foks tomonidan kiritilgan H -funksiya maxsus funksiyalar nazariyasidagi eng umumiy va qudratli apparatlardan biri hisoblanadi.

Foksning H -funksiyasi Mellin–Barnes tipidagi integral orqali aniqlanib, parametrlarning mos tanlanishi orqali ko'plab klassik maxsus funksiyalarni o'z ichiga oladi. Bunday umumlashma nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki asimptotik tahlil orqali murakkab jarayonlarning uzoq vaqt yoki katta argumentlar sohasidagi xulq-

atvorini o'rganish imkonini ham beradi. Shu sababli H -funksiyaning asimptotikalari masalasi mustaqil ilmiy ahamiyatga ega.

Mazkur tezisda Foksning H -funksiyasi va uning ayrim xususiy hollari uchun asimptotik formulalarni olish masalasi ko'rib chiqiladi hamda mavjud ilmiy natijalar tizimli tahlil qilinadi.

Adabiyotlar tahlili. Foksning H -funksiyasi nazariyasining shakllanishi va rivojlanishi bir qator taniqli matematik olimlar nomi bilan bog'liq. Dastlab ushbu funksiya XX asrning o'rtalarida C.Fox tomonidan Mellin–Barnes integralining umumlashmasi sifatida taklif etilgan. Keyinchalik bu yo'nalish H.M.Srivastava va R.G.Buschman ishlarida sezilarli darajada rivojlantirildi.

Maxsus funksiyalar va ularning asimptotik tahliliga bag'ishlangan fundamental tadqiqotlar A.Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhettinger va F.G.Tricomi tomonidan amalga oshirilgan bo'lib, ularning ishlari Foksning H -funksiyasi uchun ham nazariy asos vazifasini o'taydi. Ayniqsa, Erdélyi rahbarligida yaratilgan "Higher Transcendental Functions" to'plami umumlashgan maxsus funksiyalarni o'rganishda muhim manba hisoblanadi.

Meijerning G -funksiyasi va uning Foks H -funksiyasi bilan bog'lanishi masalalari C.S.Meijer, shuningdek, A.M.Mathai va R.K.Saxena ishlarida chuqur tahlil qilingan. Ushbu mualliflar H -funksiyaning statistik taqsimotlar va ehtimollar nazariyasidagi qo'llanishlarini ham ko'rsatib berganlar.

So'nggi yillarda kasr tartibli analizning rivojlanishi bilan bog'liq holda R.Gorenflo, F.Mainardi va Y.Luchko tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda H -funksiyaning asimptotik xossalardan kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarini ifodalashda samarali foydalanilgan.

Asosiy qism.

1. Foksning H -funksiyasi ta'rifi

Foksning H -funksiyasi quyidagi Mellin–Barnes integral orqali aniqlanadi:

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)} z^{-s} ds.$$

Bu yerda $\Gamma(\cdot)$ — Gamma-funksiya, L esa kompleks tekislikdagi mos kontur bo'lib, qutblarni ajratish shartlarini qanoatlantiradi.

2. Xususiy hollar

Parametrlarning maxsus tanlanishi orqali Foksning H -funksiyasidan quyidagi funksiyalar olinadi:

- Meijerning G -funksiyasi;
- umumlashgan gipergeometrik funksiyalar;
- Mittag–Leffler funksiyalari;
- Wright tipidagi funksiyalar.

Bu holatlar H -funksiyaning universalligini ko'rsatadi.

3. Asimptotik tahlil

Asimptotik tahlilning asosiy maqsadi $z \rightarrow 0$ yoki $z \rightarrow \infty$ H-funksiyaning xulq-atvorini aniqlashdan iborat. Mellin transformatsiyasi va qutblar nazariyasiga asoslangan holda integral ostidagi Gamma-funksiyalarning qutblari orqali asosiy hissa beruvchi hadlar aniqlanadi.

Masalan, $z \rightarrow \infty$ yoki $z \rightarrow \infty$ da asimptotik xulq, odatda, Gamma-funksiyalarning eng o'ng qutblari bilan belgilanadi va quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$H_{p,q}^{m,n}(z) \sim \sum_k C_k z^{\lambda_k}, \quad z \rightarrow \infty,$$

bu yerda λ_k dominant qutblarga mos darajalar.

4. Amaliy ahamiyati

Olingan asimptotik formulalar kasr tartibli differensial tenglamalar, diffuziya jarayonlari va anomal transport modellarida yechimlarning uzoq vaqt oralig'idagi xulq-atvorini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Xulosa. Tezida Foksning H-funksiyasi va uning ayrim xususiy hollari uchun asimptotik baholash masalalari tizimli ravishda ko'rib chiqildi. Ushbu funksiya maxsus funksiyalar nazariyasida eng umumiy integral apparatlardan biri bo'lib, ko'plab klassik funksiyalarni yagona shaklda ifodalash imkonini beradi. Asimptotik tahlil natijalari matematik analiz bilan bir qatorda, matematik fizika va kasr tartibli modellashtirish masalalarida ham keng qo'llanilishi mumkin. Olingan natijalar kelgusida murakkab integral va differensial tenglamalar uchun aniq va taxminiy yechimlarni qurishda nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Fox C. The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Amer. Math. Soc., 1961.
2. Mathai A. M., Saxena R. K. The H-function with applications in statistics and other disciplines. Wiley Eastern, 1978.
3. Srivastava H. M., Buschman R. G. Theory and Applications of Convolution Integral Equations. Kluwer Academic, 1992.
4. Erdélyi A. et al. Higher Transcendental Functions, Vol. I–III. McGraw-Hill, 1953.
5. Meijer C. S. On the G-function. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 1946.
6. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus and anomalous diffusion. Springer, 1997.
7. Kilbas A. A., Saigo M. H-transforms: Theory and Applications. CRC Press, 2004.