

DIFFERENSIAL VA AYIRMALI TENGLAMALAR UCHUN GRIN FUNKSIYASI ASOSIDA CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISH

Botiraliyeva Zaynabxon Akmaljon qizi

Fargʻona davlat universiteti amaliy matematika mutaxassisligi I -kurs magistranti

E-mail: zaynabxonbotiraliyeva@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar uchun qoʻyilgan chegaraviy masalalarni yechishda Grin funksiyasi usulining nazariy asoslari va amaliy tatbiqi oʻrganilgan. Tadqiqot jarayonida differensial operator uchun Grin funksiyasini qurish usuli bayon etilib, uning asosiy xossalari, jumladan, musbatlik, simmetriya va integral ifodalanish xususiyatlari tahlil qilingan. Shuningdek, mazkur differensial masalaning ayirmali analogi keltirilib, ayirmali Grin funksiyasi orqali sonli yechimlarning mavjudligi va barqarorligi asoslab berilgan. Olingan natijalar differensial va ayirmali tenglamalar oʻrtasidagi bogʻliqlikni ochib berib, sonli hisoblash sxemalarini nazariy jihatdan asoslash imkonini beradi. Tadqiqot natijalari matematik fizika va hisoblash matematikasi masalalarini yechishda qoʻllash uchun muhim ahamiyatga ega.

Kalit soʻzlar. Grin funksiyasi, chegaraviy masalalar, differensial tenglamalar va ayirmali tenglamalar nazariyasi, chiziqli operatorlar, chegaraviy shartlar, fundamental yechim, integral tenglamalar, Sturm–Liouville masalalari, oʻz-oʻziga tutash operatorlar, eigenqiyamatlar va eigenfunktisyalari, diskret Grin funksiyasi.

Kirish. Chegaraviy masalalar matematik fizika, mexanika va hisoblash matematikasining muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Ayniqsa, ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan jarayonlarni tahlil qilishda yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligini baholash muhim ahamiyatga ega. Bunday masalalarni yechishda Grin funksiyasi usuli samarali analitik vositalardan biri hisoblanadi.

Grin funksiyasi yordamida chiziqli differensial operatorlar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini integral koʻrinishda ifodalash mumkin. Ushbu yondashuv nafaqat uzluksiz differensial tenglamalar, balki ularning ayirmali analoglari uchun ham qoʻllaniladi. Ayirmali tenglamalar orqali sonli hisoblash sxemalari quriladi va ular differensial masalalarning yaqinlashuvchi yechimlarini olish imkonini beradi.

Mazkur maqolada ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun Grin funksiyasining xossalari tahlil qilinadi hamda ushbu yondashuvning ayirmali tenglamalarga tatbiqi koʻrib chiqiladi.

Tadqiqotda quyidagi chiziqli ikkinchi tartibli differensial operator koʻrib chiqildi:

$$Lu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$



chegaraviy shartlar bilan:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

bu yerda $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

Mazkur chegaraviy masalaning yechimi Grin funksiyasi yordamida integral ko'rinishda ifodalanadi:

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Grin funksiyasi $G(x, \xi)$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. operatorga nisbatan gomogen tenglama,
2. nol chegaraviy shartlar,
3. ξ nuqtada hosilaning sakrash sharti.

Grin funksiyasini qurish uchun ikkita chiziqli mustaqil yechimdan foydalanildi. Ushbu yechimlar mos ravishda chap va o'ng chegaraviy shartlarga mos keluvchi Koshy masalalari orqali aniqlanadi. Shuningdek, differensial tenglamaning ayirmali analogi qurilib, to'rt nuqtalarida mos ayirmali operator aniqlanadi.

O'tkazilgan tahlil natijasida Grin funksiyasining quyidagi asosiy xossalari aniqlandi:

1. Grin funksiyasi manfiy bo'lmagan qiymatlarga ega;
2. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ simmetriya xossasiga ega;
3. yechim integral ko'rinishda ifodalanadi.

Ayirmali tenglama uchun qurilgan Grin funksiyasi differensial masaladagi Grin funksiyasining diskret analogi ekanligi ko'rsatildi. Ayirmali operator orqali olingan yechimlar differensial masala yechimiga yaqinlashadi va bu sonli sxemaning barqarorligini ta'minlaydi.

Shuningdek, ayirmali sxemalar yordamida olingan yechimlarning musbatligi va chegaralanganligi Grin funksiyasi xossalari orqali asoslab berildi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, Grin funksiyasi usuli chegaraviy masalalarni yechishda kuchli nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Ushbu yondashuv differensial tenglamalar uchun aniq analitik ifodalarni olish imkonini bersa, ayirmali tenglamalar orqali sonli hisoblashlarda samarali qo'llaniladi.

Ayirmali Grin funksiyasining differensial analog bilan uyg'unligi hisoblash sxemalarining aniqligi va barqarorligini ta'minlaydi. Bu esa matematik modellash va sonli tajribalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Mazkur yondashuv kelgusida murakkab ko'p o'lchovli masalalarni o'rganishda ham qo'llanishi mumkin.



Xulosa. Maqolada ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Grin funksiyasi usuli va uning ayirmali tenglamalarga tatbiqi ko'rib chiqildi. Grin funksiyasining asosiy xossalari aniqlanib, uning yordamida chegaraviy masalalarning yechimlarini integral va diskret ko'rinishda ifodalash mumkinligi ko'rsatildi. Olingan natijalar sonli hisoblash usullarini nazariy asoslashda muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnyx sxem. — Moskva: Nauka, 1989.
2. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennye metody matematicheskoy fiziki. — Moskva: Nauka, 2000.
3. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uraveneniya matematicheskoy fiziki. — Moskva: Nauka, 1977.
4. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza. — Moskva: Fizmatgiz, 1962.
5. Marchuk G.I. Metody vychislitel'noy matematiki. — Moskva: Nauka, 1989.
6. Richtmyer R.D., Morton K.W. Difference Methods for Initial-Value Problems. — New York: Interscience Publishers, 1967.