

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI KOSHI MASALASI BO'YICHA SONLI YECHISH

Abdurahmonov Asomiddin

Termiz Davlat Universiteti

Magistratura bo'limi, Amaliy matematika yo'nalishi

M-124 guruh magistranti:

Annotatsiya: Ushbu ishda oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini yechishning asosiy sonli metodlari ko'rib chiqilgan. Koshi masalasining qo'yilishi, yechimning mavjudligi va birdan-birligi shartlari bayon etilgan. Sonli yechim usullari sifatida Eyler metodi, simmetrik ayirmali sxema, ikkinchi tartibli Runge–Kutta metodlari hamda ko'p qadamli ayirmali metodlar tahlil qilingan. Metodlarning approksimatsiya xatoligi va yaqinlashish xususiyatlari o'rganilgan. Olingan natijalar sonli metodlarning aniqligi va qo'llanilish sohalarini baholash imkonini beradi.

Kalit so'zlar; Koshi masalasi, oddiy differensial tenglama, sonli metodlar, Eyler metodi, Runge–Kutta metodi, ayirmali sxema, yaqinlashish, approksimatsiya xatoligi, ko'p qadamli metodlar.

Kirish

Hozirgi kunda tabiiy fanlar, texnika va iqtisodiyot sohalarida uchraydigan ko'plab jarayonlar oddiy differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladi. Mening fikrimcha, bunday tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasini har doim ham aniq usullar yordamida yechish mumkin emas. Shu sababli amaliyotda ularni tadqiq etish va yechishda sonli metodlardan foydalanish muhim ahamiyat kasb etadi. Darhaqiqat, Koshi masalasini sonli yechish masalasi matematik modellashtirishda alohida o'rin tutadi, chunki u real jarayonlarni tahlil qilish va ularning keyingi holatini bashorat qilish imkonini beradi. Sonli metodlarda yechim bosqichma-bosqich aniqlanadi va uning aniqligi asosan qadam uzunligi hamda tanlangan metod turiga bog'liq bo'ladi. Shuningdek, sonli metodlarning turli xil ko'rinishlari mavjud bo'lib, ular orasida Eyler metodi, simmetrik ayirmali sxemalar, Runge–Kutta metodlari hamda ko'p qadamli ayirmali metodlar keng qo'llaniladi. Men afzal ko'ramanki, ushbu metodlarni faqat nazariy jihatdan emas, balki ularning approksimatsiya xatoligi va yaqinlashish xususiyatlari nuqtai nazaridan ham ko'rib chiqish muhimdir. Ushbu ishning asosiy maqsadi oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini yechishda qo'llaniladigan sonli metodlarning nazariy asoslarini o'rganish va ularning amaliy samaradorligini tahlil qilishdan iborat.

Oddiy differensial tenglamalar ko'plab tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim vosita hisoblanadi. Bunday tenglamalar uchun qo'yiladigan Koshi masalasi boshlang'ich shartlar bilan birga berilgan differensial tenglamani yechishni nazarda tutadi. Mening fikrimcha, Koshi masalasining asosiy murakkabligi shundaki, ko'p hollarda uning aniq yechimini topish imkoniyati mavjud bo'lmaydi. Shu sababli amaliy va nazariy tadqiqotlarda sonli metodlardan foydalanish zarurati yuzaga keladi. Agar differensial tenglamaning o'ng tomoni bo'lgan funksiya uzluksiz bo'lsa va argumentlari bo'yicha Lipschits shartini qanoatlantirsa, u holda Koshi masalasining yechimi mavjud va birdan-bir bo'lishi kafolatlanadi. Ushbu nazariy natija sonli metodlarni qo'llash uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Koshi masalasini sonli yechishning umumiy g'oyasi yechimni butun oraliqda emas, balki oldindan tanlab olingan tugun nuqtalarida aniqlashdan iborat. Bu nuqtalar to'rtinchi hosil qiladi va har bir tugun nuqtasida aniq yechimga yaqin bo'lgan qiymatlar hisoblab topiladi. Darhaqiqat, qadam uzunligi kichraygan sari sonli yechim aniq yechimga yaqinlashib boradi, biroq hisoblash hajmi va vaqt sarfi ortadi. Shu bois aniqlik va hisoblash samaradorligi o'rtasidagi muvozanat masalasi sonli tahlilda alohida ahamiyatga ega. Sonli metodlar turli xil bo'lib, ular orasida eng sodda usullardan biri Eyler metodidir. Bu metodda keyingi qiymat oldingi qiymat va differensial tenglamaning o'ng tomoni yordamida aniqlanadi. Eyler metodi oshkor metod bo'lib, hisoblash jihatidan juda qulay, biroq uning aniqligi nisbatan past bo'lib, birinchi tartibli approksimatsiya xatoligiga ega. Shu sababli ushbu metod ko'pincha dastlabki taxminiy hisoblashlar yoki murakkabroq metodlar uchun boshlang'ich qiymatlarni topishda qo'llaniladi. Aniqlikni oshirish maqsadida Eyler metodining turli takomillashtirilgan ko'rinishlari ishlab chiqilgan. Shuningdek, simmetrik ayirmali sxemalar Eyler metodiga nisbatan yuqoriroq aniqlikni ta'minlaydi. Bunday sxemalarda funksiya qiymatlari nafaqat to'rtinchi nuqtalarida, balki oraliq nuqtalarda ham hisobga olinadi. Natijada hosil bo'lgan metodlar oshkormas bo'lib, har bir qadamda algebraik tenglamani yechishni talab etadi. Men afzal ko'ramanki, simmetrik sxemalarni amaliy masalalarda barqarorligi va ikkinchi tartibli aniqligi sababli samaraliroq metodlar qatoriga kiritish mumkin. Ularning approksimatsiya xatoligi qadam uzunligining kvadratiga proporsional bo'lib, bu aniqlikning sezilarli oshishini ta'minlaydi. Runge–Kutta metodlari sonli yechim usullari orasida alohida o'rin tutadi. Ushbu metodlarning asosiy afzalligi shundaki, ular differensial tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya qiymatlarini bir qadam davomida bir necha marta, jumladan oraliq nuqtalarda ham hisoblaydi. Shu orqali aniq yechimning xatti-harakatini yaxshiroq aks ettiruvchi natijalar olinadi. Darhaqiqat, Runge–Kutta metodlari yuqori aniqligi, barqarorligi va keng qo'llanilishi bilan ajralib turadi. Ayniqsa, ikkinchi va to'rtinchi tartibli Runge–Kutta metodlari amaliy hisoblashlarda juda samarali hisoblanadi. Ikkinchi tartibli Runge–Kutta metodlari ko'pincha prediktor–

korrektor yondashuviga asoslanib, dastlab taxminiy qiymatni aniqlaydi, so'ngra uni aniqlashtiradi. Bundan tashqari, ko'p qadamli ayirmali metodlar ham Koshi masalasini yechishda muhim rol o'ynaydi. Bu metodlarda yangi qiymatni aniqlash uchun bir nechta oldingi tugun nuqtalaridagi qiymatlardan foydalaniladi. Bunday yondashuv hisoblash samaradorligini oshiradi, biroq boshlang'ich bosqichda qo'shimcha bir qadamli metodlardan foydalanishni talab qiladi. Ko'p qadamli metodlarning aniqligi ularning approksimatsiya tartibi bilan belgilanadi va qadam uzunligi kichrayganda xatolik tez kamayadi. Umuman olganda, sonli metodlarning approksimatsiya xatoligi va yaqinlashish xususiyatlarini tahlil qilish ularni to'g'ri tanlash va samarali qo'llash imkonini beradi.

Xulosa qilib aytganda, oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini yechishda sonli metodlar muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Mening fikrimcha, aniq metodni tanlash masalaning murakkabligi, talab etiladigan aniqlik darajasi va mavjud hisoblash resurslariga bevosita bog'liq bo'lib, bu sonli tahlilning eng muhim masalalaridan biridir.

Adabiyotlar

1. Samarsky, A.A. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka, 2001.
2. Butkovskiy, A.G. Differential Equations: Theory and Applications. Moscow: Fizmatlit, 2005.
3. Ascher, U.M., Petzold, L.R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM, 1998.
4. Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer, 1993.
5. Iserles, A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge University Press, 2009.
6. Butcher, J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, 2016.
7. Burden, R.L., Faires, J.D. Numerical Analysis. Brooks/Cole, 2011.