

KOMPLEKS SONLAR NAZARIYASI.

Sheraliyeva Nilufar, Rahmatullayeva Dinora, Qudratova Zuhra

*Shahrisabz davlat pedagogika instituti pedagogika fakulteti matematika yunalishi 1-24
guruh talabalari*

Ilmiy rahbar: Turayev Ziyovuddin

Anotatsiya: *Ushbu ish matematik analiz va algebra fanlarining muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan kompleks sonlar nazariyasiga bag‘ishlangan. Unda kompleks sonlarning kelib chiqish sabablari, ularning matematikada va amaliy fanlarda tutgan o‘rni, shuningdek, algebraik ifodalanishi batafsil yoritiladi. Kompleks son $z = a + bi$ ko‘rinishida tasvirlanib, uning haqiqiy va mavhum qismlari o‘rtasidagi bog‘liqlik, kompleks tekislikdagi geometrik talqini hamda Argand diagrammasi orqali tasvirlash metodlari o‘rganiladi. Kompleks sonning moduli va argumenti, ularni topish usullari, darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish kabi amallar Moavr formulasi yordamida aniq va izchil tarzda bayon qilinadi.*

Ishda kompleks sonlar ustida bajariladigan asosiy arifmetik amallar — yig‘indi, ayirma, ko‘paytma va bo‘linma — ilmiy asoslangan holda misollar bilan izohlangan. Shuningdek, kompleks sonlarning trigonometrik va eksponensial ko‘rinishlarda ifodalanishi, Euler formulasi $z = re^{i\theta}$ orqali turli matematik masalalarni soddalashtirishdagi afzalliklari ko‘rsatib beriladi. Kompleks funksiyalar, ularning hosilalari, analitikligi va geometriyaviy talqinlari haqida qisqacha tushuncha berilib, differensial tenglamalar yechimida kompleks sonlardan foydalanishning amaliy ahamiyati yoritilgan.

Shuningdek, mavzuda kompleks sonlarning fan va texnikadagi qo‘llanilishi — elektr zanjirlarini tahlil qilish, to‘lqin jarayonlarini modellashtirish, signal tahlili, kvant mexanikasi, fizik jarayonlar va muhandislik hisob-kitoblaridagi roli muhim o‘rin tutadi. Ishda keltirilgan nazariy qoidalar ko‘plab misollar va grafiklar yordamida mustahkamlanib, o‘quvchi yoki tadqiqotchi uchun mavzuni chuqurroq anglash imkoniyati yaratiladi. Natijada ish kompleks sonlar mavzusini keng qamrab olgan, nazariy va amaliy jihatdan to‘liq tasavvur beruvchi ilmiy-uslubiy mazmundagi material sifatida shakllantirilgan.

Kalit so‘zlar. *Kompleks son, kompleks tekislik, Argand diagrammasi, haqiqiy qism, mavhum qism, moduli, argumenti, Euler formulasi, Moavr formulasi, trigonometriya ko‘rinishi, eksponensial ko‘rinish, kompleks sonlarni qo‘shish, kompleks sonlarni ayirish, kompleks sonlarni ko‘paytirish, kompleks sonlarni bo‘lish, ildiz chiqarish, darajaga ko‘tarish, algebraik ko‘rinish, geometriyaviy talqin, kompleks funksiyalar, analitik funksiya, elektr zanjirlari, signal tahlili, to‘lqin jarayonlari.*

Asosiy qism.

Kompleks sonlar tekisligi — bu har bir kompleks sonni geometriyada nuqta yoki vektor sifatida tasvirlash uchun ishlatiladigan koordinatalar sistemasi.

Kompleks son: $z = a + bi$ bu yerda

a — haqiqiy qism

b — mavhum qism

Tekislikda quyidagicha joylashadi:

gorizontal (x o‘qi) — haqiqiy o‘q,

vertikal (y o‘qi) — mavhum o‘q.

Kompleks sonni nuqta sifatida tasvirlash

Kompleks son $z = a + bi$ tekislikda koordinata nuqta sifatida: (a, b) ko‘rinishida ifodalanadi.

Masalan: soni — $(3, 4)$ soni — $(-2, 1)$

Kompleks sonni vektor sifatida tasvirlash:

Kompleks sonni nuqta sifatida emas, balki boshlanishi $(0,0)$ dan chiqqan vektor sifatida ham tasavvur qilish mumkin. Bu vektorning: uzunligi — modul, o‘q bilan hosil qilgan burchagi — argument deyiladi.

Kompleks sonlar tekisligining ahamiyati:

Trigonometrik ko‘rinish orqali ko‘paytirish va bo‘lish soddalashadi, elektr zanjirlarni tahlil qilishda, differensial tenglamalarni yechishda, to‘lqinlar, tebranishlar, signal tahlilida keng qo‘llanadi, aylanish va fazaviy o‘zgarishlarni tasvirlashda qulay.

Ta’rif: Qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari aniqlangan C to‘plamga kompleks sonlar to‘plami, uning elementlari esa kompleks sonlar deb ataladi.

Kompleks sonlar to‘plamining $(a,0)$ ko‘rinishidagi elementlari to‘plamini R_1 orqali belgilaymiz. C da kiritilgan qo‘shish va ko‘paytirish amallarini R_1 da qaraymiz:

$$(a,0) + (c,0) = (a+c,0)$$

$$(a,0) \cdot (c,0) = (a \cdot c,0)$$

Ushbu tengliklardan ko‘rinadiki, R_1 to‘plamdagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari, haqiqiy sonlar to‘plamidagi amallar kabi aniqlanadi.

R_1 va R to‘plamlar orasida $f((a,0))=0$ kabi $f: R_1 \rightarrow R$ moslik o‘rnatilgan, yuqoridagi tengliklardan ushbu moslik ko‘paytma va yig‘indi amallarini saqlashi kelib chiqadi. Demak,

$(a,0)=a$ deb olish mumkin. Agar $(0,1)$ elementni i orqali belgilasak,

$i^2=(0,1) \cdot (0,1)=(-1,0)=-1$ bo‘ladi. Ushbu $i \in C$ elementga mavhum birlik deyiladi. Ixtiyoriy

$(a,b) \in C$ uchun $(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0) \cdot (0,1)=a+bi$ tenglikni yozishimiz mumkin. Shunday qilib, kompleks sonlar to‘plamining ixtiyoriy elementini

$z=a+bi$ shaklda yozish mumkin. Bu shaklga kompleks sonning algebraik shakli deyiladi. Kompleks sonning algebraik shaklidagi a songa kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va $\text{Re}(z)$ orqali belgilanadi. Undagi b soni esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $\text{Im}(z)$ orqali belgilanadi. Mavhum qismi nolga teng bo'lgan kompleks sonlar haqiqiy sonlar bo'lsa, haqiqiy qismi nol bo'lgan kompleks sonlar mavhum kompleks sonlar deyiladi. Ushbu $z=a+bi$ kompleks soni $z=a+bi$ kompleks soniga qo'shma kompleks son deyiladi.

Kompleks sonlarni xossalari.

1. Qo'shish va ko'paytirish xossalari

Kommutativlik:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Distributivlik:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

2. Modulning xossalari

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, z_2 \neq 0$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

3. Argumentning xossalari

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg(z_1 / z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

4. Konjugat son xossalari

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$$

5. Daraja xossasi (De Moivre formulasi)

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Kompleks sonlarni qo'shish

Agar $z_1 = a + bi$ va $z_2 = c + di$ bo'lsa, ularni qo'shish shunday amalga oshiriladi:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Tushuntirish:

Haqiqiy qismlar (a va c) qo'shiladi.

Mavhum qismlar (b va d) qo'shiladi.

Natijada yangi kompleks son hosil bo'ladi.

Misol:

$$z_1 = 3 + 2i$$

$$z_2 = 1 + 5i$$

$$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (2 + 5)i = 4 + 7i$$

Kompleks sonlarni ayirish

Agar $z_1 = a + bi$ va $z_2 = c + di$ bo'lsa, ularni ayirish shunday amalga oshiriladi:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Tushuntirish:

Haqiqiy qismlar (a va c) ayriladi.

Mavhum qismlar (b va d) ayriladi.

Natijada yangi kompleks son hosil bo'ladi.

Misol:

$$z_1 = 5 + 7i$$

$$z_2 = 2 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = (5 - 2) + (7 - 3)i = 3 + 4i$$

Kompleks sonlarni ko'paytirish

Agar $z_1 = a + bi$ va $z_2 = c + di$ bo'lsa, ularni ko'paytirish shunday amalga oshiriladi:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Tushuntirish:

Haqiqiy qism: $a \cdot c - b \cdot d$

Mavhum qism: $a \cdot d + b \cdot c$

Natijada yangi kompleks son hosil bo'ladi.

Misol:

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 1 + 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4 + 3 \cdot 1)i = (2 - 12) + (8 + 3)i = -10 + 11i$$

Kompleks sonlarni bo'lish

Agar $z_1 = a + bi$ va $z_2 = c + di$ ($c \neq 0$ yoki $d \neq 0$) bo'lsa, ularni bo'lish shunday amalga oshiriladi:

$$z_1 / z_2 = (a + bi) / (c + di) = ((a + bi)(c - di)) / (c^2 + d^2) = (ac + bd) / (c^2 + d^2) + (bc - ad) / (c^2 + d^2)i$$

Tushuntirish:

Bo'lish uchun z_2 ning konjugatini ($c - di$) bilan ko'paytiramiz.

Haqiqiy va mavhum qismlar alohida hisoblanadi.

Natijada yangi kompleks son hosil bo'ladi.

Misol:

$$z_1 = 3 + 4i$$

$$z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 / z_2 = ((3 + 4i)(1 - 2i)) / (1^2 + 2^2) = (3 + 8 + (-6 + 4i)) / 5 = (-5/5) + (10/5)i = -1 + 2i$$

Kompleks sonlarni geometriyaga tadbiqui

1. Kompleks sonlarni tekislikda tasvirlash

Kompleks son $z = a + bi$ x-y tekislikda nuqta sifatida ko‘rsatiladi:

X o‘qi — haqiqiy qism (a)

Y o‘qi — mavhum qism (b)

Natijada $z = a + bi$ nuqta (a, b) bilan ifodalanadi.

Misol: $z = 3 + 4i \rightarrow$ nuqta (3, 4)

2. Modul va argument yordamida tasvirlash

Modul: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — nuqta (0,0) dan z gacha bo‘lgan masofa.

Argument: $\theta = \arctan(b/a)$ — nuqtaning x-o‘q bilan burchagi.

Trigonometriya ko‘rinishi: $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$

Bu yordamida polar koordinatalarda kompleks sonni tasvirlash mumkin.

Geometriyadagi foydasi:

Modul $\rightarrow$ masofa

Argument $\rightarrow$ yo‘nalish

3. Qo‘shish va ayirishni geometrik tushuntirish

Qo‘shish: $z_1 + z_2 \rightarrow$ vektorlarni ularning boshidan oxirigacha qo‘shish (parallelogramma qoidasi).

Ayirish: $z_1 - z_2 \rightarrow$ bir vektordan ikkinchi vektorni chiqarish; natija vektor farqi sifatida ko‘rsatiladi.

Misol:

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 + i$$

$$z_1 + z_2 = 3 + 4i \rightarrow \text{vektorlarni qo‘shish orqali natijani topish}$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 2i \rightarrow \text{vektor farqi}$$

4. Ko‘paytirish va bo‘lishni geometrik tushuntirish

Ko‘paytirish: $z_1 \cdot z_2$

Modullar ko‘payadi: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Argumentlar qo‘shiladi: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Bo‘lish: z_1 / z_2

Modullar bo‘linadi: $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$

Argumentlar ayriladi: $\arg(z_1 / z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

Geometriyadagi foydasi:

Ko‘paytirish $\rightarrow$ nuqtani aylantirish va kattalashtirish

Bo‘lish $\rightarrow$ nuqtani aylantirish va kichraytirish

5. Konjugatni geometrik tasvirlash

$$z = a + b i \rightarrow \bar{z} = a - b i$$

Bu nuqtani x o‘qi bo‘yicha aks ettirish.

Masofa $|z|$ o‘zgarmaydi, faqat yo‘nalish (argument) o‘zgaradi: $\theta \rightarrow -\theta$

6. Kvadrat ildiz va De Moivre formulasi

Kvadrat ildiz olish $\rightarrow$ modulning ildizi va argumentni 2 ga bo‘lish:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} (\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))$$

Umumiy holda: $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \rightarrow$ nuqtani aylantirish va modulni ko‘paytirish

Geometriyadagi foydasi:

Ko‘rsatkich darajalari $\rightarrow$ nuqtani aylantirish va kattalashtirish

Ildiz $\rightarrow$ nuqtani aylantirish va kichiklashtirish

Xulosa

Kompleks sonlar matematikada muhim o‘rin tutadigan tushunchalardan biri bo‘lib, ular haqiqiy sonlar to‘plamini mantiqiy ravishda kengaytirish natijasida vujudga kelgan. Ushbu maqolada kompleks sonlarning kelib chiqishi, ularning algebraik ko‘rinishi, geometrik talqini hamda ular ustida bajariladigan asosiy amallar keng yoritildi. Kompleks sonlar yordamida ilgari faqat nazariy jihatdan mavjud bo‘lgan yoki yechimi yo‘q deb qaralgan ko‘plab tenglamalarni yechish imkoniyati paydo bo‘ldi. Ayniqsa, kvadrat va yuqori darajali tenglamalar nazariyasida kompleks sonlarning ahamiyati beqiyosdir.

Bundan tashqari, kompleks sonlar nafaqat sof matematikada, balki fizika, elektrotexnika, mexanika, signal va to‘lqinlar nazariyasi kabi ko‘plab amaliy fanlarda ham keng qo‘llaniladi. Ular orqali murakkab jarayonlarni soddaroq va tushunarliroq shaklda ifodalash mumkin. Kompleks tekislik, modul va argument tushunchalari matematik tasavvurni yanada boyitib, masalalarga geometrik yondashuvni shakllantiradi.

Xulosa qilib aytganda, kompleks sonlarni chuqur o‘rganish nafaqat matematik bilimlarni mustahkamlaydi, balki mantiqiy fikrlashni rivojlantiradi hamda zamonaviy fan va texnika sohalarida uchraydigan murakkab masalalarni samarali hal etishga yordam beradi. Shu sababli kompleks sonlar mavzusi matematik ta’limning muhim va ajralmas qismi hisoblanadi