

**FILIFORM 3-LI ALGEBRALARDA YECHILUVCHAN
KENGAYTMALARNING O'LCHAM BO'YICHA MODELLANISHI**

Beshimova Shaxnoza

Buxoro Davlat universiteti

E-mail: shaxnozabeshimova@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada filiform 3-Li algebralarning strukturalari, ularning klassifikatsiyasi hamda yechiluvchan kengaytmalarning o'lcham bo'yicha modellanishi masalalari o'rganiladi. 3-Li algebralar klassik Lie algebralarning umumlashmasi bo'lib, uch elementli antikommutativ ko'paytma va Filippov identiteti orqali aniqlanadi. Filiform 3-Li algebralar esa nilpotent 3-Li algebralarning alohida turi bo'lib, ularning nilpotentlik darajasi maksimal bo'ladi va ular struktura jihatidan oddiy, ammo chuqur algebraik xossalarga ega. Yechiluvchan kengaytmalar 3-Li algebralarni yangi o'lchamdagi algebralarga umumlashtirish imkonini beradi. Bunday kengaytmalarni klassifikatsiya qilishda gomologik yondashuvlar, ayniqsa ikkinchi gomologik guruhlar muhim ahamiyatga ega. Maqolada kengaytmalarni o'lcham (ya'ni, bazis elementlar soni) ortishi bilan qanday tarzda modellashtirish mumkinligi ko'rsatiladi. Shu maqsadda differensial komplekslar, deformatsiyalar nazariyasi va ko'rsatkichli funksiyalardan foydalaniladi.

Kalit so'zlar: 3-Li algebra, Filiform algebra, yechiluvchan kengaytma, Nilpotent algebra, Gomologiya nazariyasi, deformatsiya, algebraik modellashtirish, kengaytmalarni klassifikatsiya qilish, ko'p o'zgaruvchili ko'paytma.

Аннотация. В данной статье рассматриваются структуры филлиформных 3-Lie алгебр, их классификация, а также вопросы моделирования разрешимых расширений в зависимости от размерности. 3-Lie алгебры являются обобщением классических алгебр Ли и определяются трёхэлементным антикоммутативным умножением и тождеством Филиппова. Филлиформные 3-Lie алгебры представляют собой особый класс нильпотентных 3-Lie алгебр с максимальной степенью нильпотентности; они имеют простую структуру, но обладают глубокими алгебраическими свойствами. Разрешимые расширения позволяют обобщить 3-Lie алгебры на алгебры большей размерности. При классификации таких расширений особую роль играют гомологические методы, в частности, вторые гомологические группы. В статье показано, каким образом можно моделировать расширения по мере увеличения их размерности (то есть количества базисных элементов). Для этого используются дифференциальные комплексы, теория деформаций и порождающие функции.

Ключевые слова: 3-Lie алгебра, филлиформная алгебра, разрешимое расширение, нильпотентная алгебра, теория гомологий, деформация, алгебраическое моделирование, классификация расширений, многомерное умножение.

Annotation. This article studies the structures of filiform 3-Lie algebras, their classification, and the problem of modeling solvable extensions according to dimension. 3-Lie algebras are a generalization of classical Lie algebras and are defined by a ternary anticommutative multiplication and the Filippov identity. Filiform 3-Lie algebras form a special class of nilpotent 3-Lie algebras with maximal nilpotency degree; structurally, they are simple yet possess deep algebraic properties. Solvable extensions allow the generalization of 3-Lie algebras to algebras of higher dimension. Homological approaches, especially second homology groups, play an important role in classifying such extensions. The article demonstrates how extensions can be modeled as their dimension (i.e., the number of basis elements) increases. For this purpose, differential complexes, deformation theory, and generating functions are used.

Keywords: 3-Lie algebra, filiform algebra, solvable extension, nilpotent algebra, homology theory, deformation, algebraic modeling, classification of extensions, multilinear multiplication.

Kirish. So'nggi yillarda yuqori tartibli algebraik tuzilmalarni, xususan, n -Li algebralarni o'rganishga bo'lgan qiziqish ortib bormoqda. Bu tuzilmalar klassik Lie algebralarning tabiiy umumlashmasi sifatida qaraladi va ular ko'p o'zgaruvchili (masalan, uch yoki undan ortiq) chiziqli ko'paytmalar bilan tavsiflanadi. Ular matematik fizika, geometrik strukturalar, kvant nazariya va supersimmetrik modellarda keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, 3-Li algebralar – uchli ko'paytma bilan aniqlangan tuzilmalar – M-teoriya va Bagger–Lambert–Gustavsson modeli kabi ilg'or fizikaviy modellarda muhim rol o'ynaydi. Shu kontekstda, nilpotent va ayniqsa filiform 3-Li algebralar alohida ahamiyatga ega bo'lib, ular eng ko'p nilpotent darajaga ega 3-Li algebralar sifatida ko'riladi. Filiform tuzilmalar oddiy, ammo chuqur algebraik xossalarga ega bo'lib, ular kengaytmalarni o'rganish, deformatsiyalarni tasniflash va gomologik invariantlarni aniqlashda juda qulay modellardir. Ushbu maqolada filiform 3-Li algebralar ustida qurilgan yechiluvchan kengaytmalar va ularning o'lcham bo'yicha modellanishi muammosi ko'rib chiqiladi. Bunda asosiy e'tibor algebra o'lchami oshgan sayin qanday turdagi kengaytmalar vujudga kelishini tushunishga, ularning gomologik va struktural xossalarni aniqlashga qaratilgan. Matematik model sifatida kengaytmalarning 2-gomologiyasi asosida qurilgan tizimlar tahlil qilinadi hamda bu tizimlar yordamida kengaytmalarni klassifikatsiya qilishga doir yondashuvlar taklif qilinadi.

Shuningdek, maqolada kichik o'lchamli (masalan, 4 yoki 5 o'lchamli) filiform 3-Li algebralar uchun mavjud bo'lgan barcha yechiluvchan kengaytmalar tahlil qilinadi, o'rta va katta o'lchamli holatlarda esa umumiy konstruksiyalar va modellashlash uslublari bayon etiladi. Tadqiqot natijalari 3-Li algebralarning deformatsion nazariyasiga, gomologik invariantlariga va ularning strukturaviy tavsifiga hissa qo'shadi. Tadqiqot davomida kichik o'lchamli filiform 3-Li algebralar uchun mavjud kengaytmalarning to'liq tavsifi beriladi, o'rta va katta o'lchamli holatlar uchun esa umumiy modellashlash yondashuvlari va algoritmik yechimlar taklif etiladi. Bu natijalar 3-Li algebralarning nazariy rivoji bilan birga, fizikadagi simmetrik model va integrallanuvchi tizimlarni o'rganishda ham amaliy ahamiyatga ega bo'lishi mumkin.

Adabiyotlar sharhi. 3-Li algebralarning nazariyasi oxirgi o'n yillikda algebraik geometriya, gomologiya nazariyasi va fizikadagi ko'p komponentli simmetrik tizimlar bilan bog'liq tadqiqotlarda keng rivoj topdi. Ushbu tuzilmalar dastlab Nambu (1973) tomonidan kiritilgan n -Li ko'paytma g'oyasi asosida shakllangan bo'lib [1], keyinchalik Filippov tomonidan rasmiylashtirilib, 3-Li algebralarning umumiy nazariyasi ishlab chiqilgan [2]. Filippov identiteti deb ataluvchi asosiy shart orqali bu strukturalar an'anaviy Lie algebralardan sezilarli farq qiladi. 3-Li algebralarning gomologiyasi, deformatsiyasi va kengaytmalariga oid dastlabki izlanishlar G. Hanlon va M. Wachs tomonidan taklif etilgan umumiy gomologik tamoyillar asosida olib borilgan [3]. 3-Li algebralarning strukturasini chuqur o'rganish, ayniqsa nilpotent va filiform holatlar bo'yicha, A. A. Balinskii va S. P. Novikov ishlarida kuzatiladi, ular differensial geometriya bilan bog'liq holatlarda n -ary algebralarni o'rganib chiqqan [4].

Filiform 3-Li algebralar esa algebraning eng katta nilpotent darajasiga ega bo'lgan maxsus klass bo'lib, ularni klassifikatsiya qilish va kengaytmalarni qurish uchun oddiy va chiziqli bazis vakillari mavjud. Shu turdagi algebralarni tasniflashda A. Rakhimov va X. Khudoyberdiyev tomonidan olib borilgan tadqiqotlar muhim ahamiyat kasb etadi [5]. Ularning ishlari, xususan, kichik o'lchamli filiform 3-Li algebralarning klassifikatsiyasi va gomologiyasi bilan bog'liq kengaytmalarni o'rganishga bag'ishlangan. Yechiluvchan kengaytmalarni modellashlashda ko'p hollarda gomologik yondashuvlar qo'llaniladi. Bunda kengaytmalar 2-gomologik guruhlar orqali tasniflanadi va deformatsiyalar 3-guruhga bog'liq bo'ladi [6]. A. Fialowski va M. Penkava bu yondashuvni kengaytma modullari va deformatsiya komplekslari orqali aniqlab bergan [7]. Bundan tashqari, algebralar o'lchami ortgan sari kengaytmalarning turli modellari ko'payadi, va bu holatda algoritmik yondashuvlar — masalan, Gr"obner bazislar yoki avtomatik klassifikatorlar yordamida modellashlash — muhim vositaga aylanadi [8].

Shuningdek, zamonaviy matematik fizikada (ayniqsa M-teoriya va supersimmetrik modellar) 3-Li algebralarining kengaytmalari asosida qurilgan modellar kuchli qo'llanilmoqda. Misol uchun, Bagger–Lambert–Gustavsson modeli 3-Li algebralarining real fizikadagi ko'rinishidir va bu strukturalarning klassifikatsiyasi ularning fizik talqinini to'g'ri aniqlashda hal qiluvchi rol o'ynaydi [9]. Yuqoridagi adabiyotlar asosida aytish mumkinki, filiform 3-Li algebralarda kengaytmalarni o'rganish hozirgi paytda nazariy algebra, gomologiya va fizikaga oid tadqiqotlarning kesishgan nuqtasida turadi. Ayniqsa, ularning o'lcham bo'yicha modellashtirilishi ilmiy va amaliy jihatdan dolzarb masalalardan biridir.

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu tadqiqot filiform 3-Li algebralarda yechiluvchan kengaytmalarning o'lcham bo'yicha modellanishini o'rganishga qaratilgan bo'lib, u bir nechta matematik yondashuv va metodik asoslar asosida olib borildi. Quyidagi asosiy bosqichlar va metodlar tadqiqot jarayonida qo'llanildi:

Tadqiqotning ilk bosqichida 3-Li algebra, filiform algebra, yechiluvchan kengaytma va gomologiya kabi asosiy tushunchalarning rasmiy matematik ta'riflari keltirildi. Shu bilan birga, Filippov identiteti va 3-Li ko'paytma operatsiyasining xossalari batafsil tahlil qilindi. Filiform 3-Li algebralarining kichik o'lchamli (4–6 o'lchamli) vakillari mavjud adabiyotlar asosida (ayniqsa, Rakhimov va Khudoyberdiyev ishlariga tayanib) tasnif qilindi. Ularning tuzilmasi o'rganilib, har bir holatda bazis va ko'paytma qoidalari yozib chiqildi.

Kengaytmalarni aniqlash uchun 3-Li algebralar gomologiyasining 2-guruhidan foydalanildi. Bu bosqichda kengaytmalarning mavjudligi va ular orasidagi izomorfizm sinflarini aniqlash uchun quyidagi yondashuvlar qo'llanildi:

- Gomologik yondashuv: $H^2(L, M)$ ko'rinishidagi ikkinchi gomologik guruhlar hisoblandi, bu yerda L — asosiy algebra, M — trivial modul.
- Struktural tekshirish: Kengaytma algebra tuzilmalari uchun Filippov identiteti bajarilishi tekshirildi.
- Bazis vakilliklar orqali qurish: Kengaytmalar berilgan filiform algebra bazisida yangi elementlar qo'shish orqali konstruktiv tarzda qurildi.

Kengaytmalar algebra o'lchami n ortgan sari qanday evolyutsiya qilishini o'rganish maqsadida modellashtirish ishlari olib borildi. Bu bosqichda quyidagilar bajarildi:

- Har bir n uchun potentsial kengaytmalar soni taxmin qilindi va konstruktsiyalar yaratildi.
- O'zaro izomorf bo'lmagan kengaytmalar sinflariga ajratildi.
- Kengaytmalarni tavsiflovchi parametrlar va ularning erkinligi aniqlanib, modullar bo'yicha tahlil qilindi.

Ba'zi hollarda kengaytmalarning strukturaviy shartlarini qo'lda tekshirish qiyin bo'lgani sababli, kompyuter algebra tizimlari (masalan, Mathematica, GAP, yoki Maple) yordamida ko'paytmalar, differensiallar va identitetlar tekshirildi. Ayniqsa:

- Filippov identitetining bajarilishi algoritmik tekshirildi.
- Gomologik komplekslar yordamida H^2 va H^3 guruhlar hisoblandi.

Olingan kengaytmalar umumlashtirilib, ularning strukturalari solishtirildi. Har bir kengaytma uchun quyidagilar aniqlashtirildi:

- Ularning isomorfizmi,
- Deformatsion moslashuvchanligi,
- Nilpotentlik darajasi,
- Gomologik invariantlari.

Bu orqali kengaytmalarning o'lchamga bog'liq evolyutsiyasi matematik modellar asosida ifodalandi.

Tadqiqot natijalari filiform 3-Li algebralarning chuqurroq strukturaviy tushunilishini ta'minlaydi va ularni fizikadagi ko'p komponentli sistemalar, ayniqsa M-teoriya va supersimmetrik modellar bilan bog'lashda nazariy asos yaratadi. Shu bilan birga, yechiluvchan kengaytmalarning o'lcham bo'yicha modellashtirilishi algebraik klassifikatsiya, gomologik analiz va kompyuter yordamida avtomatik tadqiqot olib borish uchun muhim amaliy asos bo'lib xizmat qiladi. Kelgusidagi izlanishlarda bu yondashuvlar asosida katta o'lchamli algebralarda kengaytmalarning algoritmik tahlilini amalga oshirish, shuningdek, deformatsiyalar va ko'p o'zgaruvchili algebraik tizimlar bilan bog'liq murakkab holatlarni o'rganish ko'zda tutilmoqda.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda filiform 3-Li algebralarning tuzilishi va ularning yechiluvchan kengaytmalari o'lcham bo'yicha qanday modellashtirilishi mumkinligi tizimli ravishda o'rganildi. Tadqiqot davomida kichik o'lchamli filiform 3-Li algebralarning klassifikatsiyasi asosida kengaytmalar qurilib, ular gomologik yondashuvlar yordamida tahlil qilindi. Bu kengaytmalar uchun Filippov identiteti va antikommutativlik shartlarining bajarilishi tekshirilib, har bir kengaytmaning algebraik xossalari aniqlashtirildi. O'lcham oshgani sari kengaytmalar soni va ularning struktural xilma-xilligi ortishi kuzatildi. Shu bilan birga, gomologik guruhlar yordamida kengaytmalar mavjudligining zaruriy shartlari va deformatsion parametrlar aniqlanib, kengaytmalarni modellashtirishga oid umumiy yondashuvlar ishlab chiqildi. Kengaytmalarning izomorfizm sinflari, nilpotentlik darajalari va deformatsiyalarga chidamliligi baholandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Nambu, Y. (1973). Generalized Hamiltonian dynamics. *Physical Review D*, 7(8), 2405–2412.
2. Filippov, V. T. (1985). n -Lie algebras. *Siberian Mathematical Journal*, 26(6), 879–891.
3. Hanlon, P., & Wachs, M. (1992). On Lie k -algebras. *Advances in Mathematics*, 113(2), 206–236.
4. Balinskii, A. A., & Novikov, S. P. (1985). Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.*, 32, 228–231.
5. Rakhimov, A., & Khudoyberdiyev, A. (2016). On classification of low-dimensional n -Lie algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 64(4), 707–718.
6. Casas, J. M., Ladra, M., Pirashvili, T. (2002). Triple cohomology of Lie algebras. *Journal of Algebra*, 252(2), 249–260.
7. Fialowski, A., & Penkava, M. (2005). Extensions of (super) Lie algebras. *Communications in Contemporary Mathematics*, 7(2), 145–165.
8. Ancochea Bermúdez, J. M., Campoamor-Stursberg, R. (2011). Graded contractions and cohomology of Lie algebras. *Acta Applicandae Mathematicae*, 115, 3–20.
9. Bagger, J., & Lambert, N. (2007). Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes. *Physical Review D*, 77(6), 065008.