

**NOLINEAR TENGLAMALAR VA MURAKKAB INTEGRALLARNING SONLI
USULLARDA YECHIMI: NAZARIYA, ALGORITMLAR VA PYTHONDA
AMALIY TATBIQLAR.**

Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich

Farg'ona davlat universiteti Katta o'qituvchisi

ismoilovaxrorjon@yandex.com

Abdurashidov Ozodbek Xurshidbek o'g'li

Farg'ona davlat universiteti talabasi

abdurashidovozodbek339@gmail.com

Andalipov Umidjon Ziyodillo o'g'li

Farg'ona davlat universiteti talabasi

andalipov2003@icloud.com

Annotatsiya. Bu ma'lumotnoma nolinear tenglamalarning sonli usullarda yechimi va murakkab integrallarning sonli hisoblash metodlari haqida tushuncha beradi. Unda quyidagi asosiy masalalar yoritilgan:

Nolinear tenglamalarni yechishning sonli usullari: Yarim bo'lish usuli (Bisection), Newton-Raphson usuli (tangenslar usuli), Sekantlar usuli (hosilasiz yaqinlashish), Oddiy iteratsiya usuli (Fixed-point iteration)

Murakkab integrallarni hisoblashning sonli metodlari: Trapetsiyalar usuli, Simpson usuli, Gauss kvadratura usullari, Monte-Karlo usuli

Har bir metodning afzalliklari, kamchiliklari, yaqinlashish tezligi va amaliy qo'llanilishi tahlil qilingan. Shuningdek, xatolikni baholash va hisoblashni to'xtatish mezonlari ko'rib chiqilgan.

Kalit so'zlar: Nolinear tenglamalar, sonli usullar, Newton-Raphson, yarim bo'lish, iteratsiya, integral hisoblash, Simpson usuli, Gauss kvadratura, Monte-Karlo.

Kirish: Nolinear tenglamalar ($f(x)=0$ ko'rinishdagi) analitik usullarda yechib bo'lmaydigan yoki juda qiyin bo'lgan hollarda sonli usullar qo'llaniladi. Bu usullar asosan taxminiy yechimlarni ma'lum aniqlik darajasida topishga qaratilgan.

Asosiy Sonli Usullar:

Yarim Bo'lish Usuli (Bisection Method)

Asosiy g'oya: $[a, b]$ oraliqda uzluksiz funksiya uchun $f(a) \cdot f(b) < 0$ shartni qanoatlantiruvchi oraliqni ketma-ket yarimga bo'lish

Algoritm:



1. $f(a) \cdot f(b) < 0$ shartni tekshirish.
2. $c = (a+b)/2$ nuqtani hisoblash.
3. Agar $f(c) = 0$ bo'lsa, c – yechim.
4. Agar $f(a) \cdot f(c) < 0$ bo'lsa, $b = c$, aks holda $a = c$.
5. Oraliq yetarlicha kichik bo'lgunga qadar takrorlash.

Afzalliklari: Soddalik, har qadamda xato chegarasini bilish.

Kamchiliklari: Yaqinlashish sekin.

Newton Usuli (Newton-Raphson Method)

Asosiy g'oya: Funksiyaga nuqtada urilgan tangensdan foydalanish.

Formulasi: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Algoritm:

1. Boshlang'ich yaqinlashish x_0 ni tanlash.
2. Yangi yaqinlashishni formuladan topish.
3. Yetarlicha yaqinlashguncha jarayonni takrorlash.

Afzalliklari: Juda tez yaqinlashish (kvadratik).

Kamchiliklari: Hosilani hisoblash talab qilinadi, noto'g'ri boshlang'ich nuqta tanlansa divergensiya.

Sekantlar Usuli (Secant Method).

Asosiy g'oya: Newton usulining hosilasiz variant.

Formulasi: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)(x_n - x_{n-1}) / (f(x_n) - f(x_{n-1}))$.

Algoritm:

1. Boshlang'ich ikkita yaqinlashish x_0 va x_1 ni tanlash.
2. Yangi yaqinlashishni formuladan topish.
3. Oldingi ikkita qiymatni yangilab, jarayonni takrorlash.

Afzalliklari: Hosilani hisoblash talab qilinmaydi

Kamchiliklari: Yaqinlashish superchiziqli (≈ 1.6 tartibli)

Oddiy Iteratsiya Usuli (Fixed-Point Iteration).

Asosiy g'oya: Tenglamani $x = g(x)$ ko'rinishga keltirish.

Formulasi: $x_{n+1} = g(x_n)$.

Algoritm:

1. Tenglamani $x = g(x)$ ko'rinishga keltirish.
2. Boshlang'ich yaqinlashish x_0 ni tanlash.
3. Yangi yaqinlashishni formuladan topish.

4. Yetarlicha yaqinlashguncha jarayonni takrorlash.

Afzalliklari: Sodda amallar.

Kamchiliklari: Yaqinlashish chiziqli, $|g'(x)| < 1$ shart bajarilishi kerak.

Muammoning dolzarbligi:

" $e^{-x} = x^2$ kabi oddiy ko'rinishdagi tenglamalarning analitik yechimi mavjud bo'lmashligi yoki $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} x \sin x dx$ kabi integrallarning aniq qiymatini topishning iloji yo'qligi ko'plab ilmiy va muhandislik masalalarini sonli usullarsiz hal qilib bo'lmashligini ko'rsatadi."

Ilmiy tilda aytganda, bu parcha:

- Transsendent tenglamalar va elementar funksiyalarda ifodalab bo'lmaydigan integrallar mavjudligini.
 - Buning ilmiy-amaliy ishlar uchun dolzarb muammo ekanligini.
 - Yechimi sifatida sonli usullarning zarurligini ta'kidlaydi.
- ko'pgina muhim amaliy masalalar analitik usullar bilan yechish imkonsizligi bilan tavsiflanadi:

Transsendent

tenglamalar:

$x = \cos x$ tenglamaning yechimi elementar funksiyalar yordamida ifodalab bo'lmaydi.

Singulyar integrallar:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$$

integralning qiymati faqat sonli usullar bilan hisoblanishi mumkin.

Ko'p o'lchovli

integrallar:

Statistik fizikadagi konfiguratsion integrallar:

$$Z = \int \dots \int e^{-\beta H(q,p)} dq dp$$

bunda o'lchov soni 10^{23} ga yetishi mumkin.

Sonli Usullarning Ahamiyati:

- **Nyuton usuli** kvadratik yaqinlashuvchanligi tufayli Afzal:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|^2$$

- **Monte-Karlo integrallash** ko'p o'lchovli masalalarda samarali:

$$X_{\text{ato}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- **Adaptiv usullar** xatoni avtomatik nazorat qiladi:

Kod Nimani Bajaradi?

Bu kod $e^{(-x^2)}$ funksiyasini 0 dan ∞ gacha bo'lgan oraliqda hisoblaydi. Natijada:

- result - integralning qiymati
- error - hisoblashdagi taxminiy xato miqdori

Adaptiv Usul Nima?

Adaptiv usulda:

Dastur avtomatik ravishda hisoblash aniqlik darajasini optimallashtiradi, Funksiya tez o'zgaradigan joylarda mayda qadam, sekin o'zgaradigan joylarda yirik qadam qo'llaydi, Xato chegarasiga erishilguncha hisoblashni takrorlaydi

Xato Nazorati Qanday Ishlaydi?

quad funksiyasi:

Integral qiymatini bir necha usulda hisoblab ko'radi, Natijalar farqini xato sifatida qaytaradi, Agar xato katta bo'lsa, qadamni maydalab qayta hisoblaydi.

Misol Natijasi:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

result, error = quad(lambda x: np.exp(-x**2), 0, np.inf)
print(f"Integral qiymati: {result:.10f}")
print(f"Taxminiy xato: {error:.2e}")
```

Chiqish:

```
Integral qiymati: 0.8862269255
Taxminiy xato: 7.01e-11
```

Afzalliklari: Avtomatik aniqlikni sozlash, Murakkab funksiyalar uchun samarali, Xato bahosini aniq ko'rsatish

Bu usul Gauss-Kronrod algoritmidan foydalanadi va ilmiy hisoblashlarda keng qo'llaniladi.

Murakkab integrallar deganda, asosan, **bir necha o'zgaruvchili funksiyalarning integrallari** (masalan, ikki o'zgaruvchili funksiyaning ikki karrali integrali, uch o'zgaruvchili funksiyaning uch karrali integrali) yoki **murakkab sohada olingan integrallar** tushuniladi. Ba'zan "murakkab integral" atamasi tushunarli bo'lmagan, yechish qiyin bo'lgan bir o'zgaruvchili integrallarga nisbatan ham ishlatiladi. Ko'pgina

funksiyalarning boshlang‘ich funksiyasini analitik (formulalar yordamida) topishning iloji yo‘q. Bunday hollarda, integralning qiymatini taqribiy hisoblash uchun sonli usullar yordamga keladi. Shuningdek, murakkab shakldagi sohalarda integrallashda ham sonli usullar qulayroq. Murakkab integrallarni sonli usullarda yechishda umumiy tamoyil, integralni kichikroq, oddiyroq qismlarga bo‘lish va har bir qismda integralni taqribiy hisoblashdan iborat. Bu jarayon odatda quyidagicha kechadi:

Integrallash sohasini diskretizatsiya qilish: Integrallash sohasi kichikroq bo‘laklarga (masalan, to‘g‘ri to‘rtburchaklarga, uchburchaklarga yoki boshqa geometrik shakllarga) bo‘linadi.

Har bir bo‘lakda taqribiy hisoblash: Har bir kichik bo‘lakda funksiyaning qiymati ma‘lum bir nuqtada (yoki nuqtalarda) hisoblanadi va shu orqali o‘sha bo‘lakdagi integralga taqribiy qiymat beriladi.

Yig‘indini hisoblash: Barcha kichik bo‘laklardagi taqribiy qiymatlar yig‘indisi umumiy integralning taqribiy qiymatini beradi.

Umumiy Sonli Usullar

Murakkab integrallarni yechishda qo‘llaniladigan ba‘zi keng tarqalgan sonli usullar:

To‘rtburchaklar usuli (Rectangle Rule): Bu usulda har bir kichik bo‘lakda funksiya konstant deb hisoblanadi va integral o‘sha bo‘lakdagi to‘rtburchakning yuzasiga teng deb olinadi. Bu eng sodda, lekin kam aniq usul.

Trapetsiya usuli (Trapezoidal Rule): Bu usulda har bir kichik bo‘lakda funksiya chiziqli deb hisoblanadi va integral trapetsiyaning yuzasi sifatida taqribiy hisoblanadi. To‘rtburchaklar usuliga nisbatan aniqroq.

Simpson usuli (Simpson's Rule): Bu usulda har bir ikkita kichik bo‘lakda funksiya kvadratik polinom bilan taqribiy hisoblanadi. Trapetsiya usuliga nisbatan sezilarli darajada aniqroq. Odatda juft sondagi bo‘laklarga bo‘lish talab qilinadi.

Monte-Karlo usuli (Monte Carlo Method): Bu usul tasodifiy sonlardan foydalangan holda integralni hisoblashga asoslangan. Yuqori o‘lchamli (ko‘p o‘zgaruvchili) integrallar uchun juda samarali bo‘lishi mumkin, chunki aniqlik o‘lchamlar soniga juda bog‘liq emas.

Gaus kvadraturasi (Gaussian Quadrature): Bu usul, integralni aniqroq hisoblash uchun oldindan belgilangan "tugunlar" (nuqtalar) va "og‘irliklar" (koeffitsientlar) dan foydalanadi. Odatda, funksiyaning yuqori darajali polinom bilan taqribiy ifodalash imkoni bo‘lganda juda samarali.

Iteratsiyali integratsiya: Agar integrallash chegaralari ma‘lum bo‘lsa va tartibli integrallash mumkin bo‘lsa, har bir o‘lcham bo‘yicha ketma-ket bir o‘lchamli kvadraturani qo‘llash mumkin. Masalan, ikki karrali integralni $(f(x,y)dx dy)$ avval y bo‘yicha, so‘ng x bo‘yicha integrallash mumkin.

Monte-Karlo usuli: Ko'p o'lchamli integrallar uchun eng moslashuvchan va ko'pincha samarali usul hisoblanadi, ayniqsa integrallash sohasi murakkab bo'lsa.

Misol (Bir o'lchovli integral uchun Trapetsiya usuli).

Bir o'zgaruvchili funksiyaning integralini sonli usulda hisoblashni sodda misolda ko'rib chiqaylik:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Trapetsiya usuli formulasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

bu yerda:

- n – intervallar soni.
- $h=(b-a)/n$ – har bir intervalning kengligi.
- $x_i=a+i \cdot h$ – bo'linish nuqtalari.

Misol orqali tushuntirish:

$$\int_1^2 x^2 dx \text{ integralni hisoblaymiz (n=4 uchun)}$$

Qadamni hisoblaymiz: $h = (2-1)/4 = 0.25$

Nuqtalarni aniqlaymiz:

$$x_0=1.00, x_1=1.25, x_2=1.50, x_3=1.75, x_4=2.00$$

Funksiya qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(1.00)=1.0000, f(1.25)=1.5625, f(1.50)=2.2500, f(1.75)=3.0625, f(2.00)=4.0000$$

4. Formulaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \approx \\ &\approx 0.25/2 [1 + 2(1.5625 + 2.2500 + 3.0625) + 4] = 2.34375 \end{aligned}$$

Foydalanilgan Adabiyotlar:

1. Toshmatov, I. (2020). Hisoblash Matematikasi. Toshkent: O‘zMU.
2. Axmadjonov, A., & Karimov, J. (2018). Sonli Usullar. O‘zbekiston nashriyoti.
3. Kroese, D. P., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2011). Handbook of Monte Carlo Methods. Wiley.
4. Gander, W., & Gautschi, W. (2000). Adaptive Quadrature—Revisited. BIT Numerical Mathematics.
5. Axmedov, A., & Karimov, J. (2020). *Sonli usullar va ularning dasturlashda qo‘llanilishi*. Toshkent: "O‘zbekiston" nashriyoti.
6. Saidov, M. H. (2018). *Muhandislik hisoblashlarida sonli usullar*. Toshkent: "Fan va texnologiya" nashriyoti.
7. Qodirov, G. N. (2017). *Yuqori matematikadan masalalar to‘plami*. Toshkent: "O‘qituvchi" nashriyoti.