

ANIQ INTEGRALNI TO'G'RI TO'RTBURCHAK USULI BILAN TAQRIBIY HISOBLASH

Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich

Farg'ona davlat universiteti

katta o'qituvchisi

ismoilovaxrorjon@yandex.com

Rahimaliyev Mardonali Zokirzoda

Farg'ona davlat universiteti, talaba

rahimalievmardonali@gmail.com

Ro'ziyev Abdulloxon Yorqinbek o'g'li

Farg'ona davlat universiteti, talaba

roziyevabdulloxon8@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada aniq integralni hisoblashda keng qo'llaniladigan to'g'ri to'rtburchaklar usuli tafsilotlari ko'rib chiqilgan. To'g'ri to'rtburchaklar usulining matematik asoslari, algoritmik qadamlar va xatoliklar baholanishi haqida batafsil ma'lumot berilgan. Shuningdek, ushbu usulning zamonaviy texnologiya, muhandislik, iqtisodiyot, biologiya va kompyuter grafikasi kabi sohalarda amaliy qo'llanilishi tahlil qilingan. Maqola o'quvchilarga integralning taqribiy yechimini samarali amalga oshirish uchun zarur nazariy va amaliy bilimlarni taqdim etadi.

Kalit so'zlar: to'g'ri to'rtburchaklar usuli, aniq integral, taqribiy hisoblash, kvadratur formulalar, integralning xatoliklari, algoritmi, matematik modellashtirish, muhandislik hisoblashlari, kompyuter grafikasi, iqtisodiy modellar, ilmiy hisoblash, raqamli integratsiya, dasturiy ta'minot, fizika, biologiya.

Abstract. This article examines in detail the rectangle method widely used for approximate calculation of definite integrals. The mathematical foundations, algorithmic steps, and error estimation of the rectangle method are thoroughly discussed. Additionally, the article analyzes the practical applications of this method in modern technology, engineering, economics, biology, and computer graphics. The paper provides readers with essential theoretical and practical knowledge to effectively perform approximate integration.

Keywords: rectangle method, definite integral, numerical approximation, quadrature formulas, integral errors, algorithm, mathematical modeling, engineering calculations, computer graphics, economic models, scientific computing, numerical integration, software, physics, biology.

Аннотация. В данной статье подробно рассмотрен метод прямоугольников, широко используемый для приближённого вычисления определённых интегралов. Освещены математические основы, алгоритмические шаги и оценка погрешностей метода прямоугольников. Кроме того, проанализированы практические применения этого метода в современных технологиях, инженерии, экономике, биологии и компьютерной графике. Статья предоставляет читателям необходимые теоретические и практические знания для эффективного выполнения приближённого интегрирования.

Ключевые слова: метод прямоугольников, определённый интеграл, численное приближение, квадратурные формулы, ошибки интеграла, алгоритм, математическое моделирование, инженерные расчёты, компьютерная графика, экономические модели, научные вычисления, численная интеграция, программное обеспечение, физика, биология.

Kirish

Matematikaning asosiy tarmoqlaridan biri bo‘lgan matematik analiz, tabiat hodisalarini modellashtirishda, texnologik jarayonlarni tahlil qilishda va ilmiy tadqiqotlar olib borishda ajralmas vositadir. Integral tushunchasi esa ushbu tarmoqning muhim qismini tashkil etadi. Aniq integral funksiyaning ma’lum oraliqdagi umumiy o‘zgarishini ifodalaydi va bu orqali yuzalar, hajmlar, ish miqdori, energiya, ehtimolliklar va boshqa fizik va geometrik kattaliklar hisoblab chiqiladi. Bu esa aniq integralni nazariy tahlillar bilan bir qatorda amaliy hisoblashlarda ham alohida o‘rin tutishini anglatadi. Biroq ko‘plab real holatlarda integral ostidagi funksiyalar murakkab, analitik jihatdan yechilmas yoki ifoda shaklida integral natijasini olish mumkin bo‘lmagan holatlarda uchraydi. Aynan shunday hollarda integralni taqribiy hisoblash zaruriyati paydo bo‘ladi. Taqribiy hisoblash usullari matematik analizning sonli metodlari bo‘limiga mansub bo‘lib, ular matematik modellarni raqamli shaklda yechish imkonini beradi. Bugungi kunda integralni taqribiy hisoblash sonli analiz, hisoblash matematikasi, informatika, fizika, muhandislik va boshqa ko‘plab fanlarda keng qo‘llanilmoqda.

Ushbu maqolada o‘rganilayotgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli aniq integralni taqribiy hisoblashning eng oddiy, lekin muhim usullaridan biri hisoblanadi. Bu usulning mohiyati shundaki, integral ostidagi funksiyaning grafigi berilgan oraliqda to‘g‘ri to‘rtburchaklar bilan taqribiy almashtiriladi va shu to‘rtburchaklar yuzalarining yig‘indisi orqali integral qiymati taxminan aniqlanadi. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli Riemann yig‘indilariga asoslanadi va matematik analizda integral tushunchasini geometrik jihatdan tushunishga xizmat qiladi.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli asosan uch xil ko‘rinishda qo‘llaniladi: chap to‘rtburchaklar usuli, o‘ng to‘rtburchaklar usuli, va markaziy (yoki o‘rta nuqta) to‘rtburchaklar usuli. Har bir metodda funksiyaning mos nuqtadagi qiymatiga asosan to‘rtburchakning balandligi belgilanadi. Bu esa hisoblash natijasiga bevosita ta‘sir ko‘rsatadi va metodning aniqligi, xatolik darajasi hamda yaqinlashuv tezligini o‘rganish imkonini beradi.

Mazkur usulning dolzarbligi shundaki, u algoritmik jihatdan juda sodda, dasturlash uchun qulay va hisoblashda kam resurs talab qiladi. Shuning uchun, bugungi raqamli asrda kompyuter orqali yechiladigan masalalarda, xususan:

- Kompyuter grafikasi (masalan, soya va yorug‘lik effektlari hisobida),
- Muhandislik hisob-kitoblarida (materiallar mustahkamligini tahlil qilishda, bosim va kuchlanishlarni hisoblashda),
- Fizik va texnologik modellashtirishda (issiqlik, elektromagnit to‘lqinlar, harorat taqsimoti),
- Biologik va iqtisodiy modellashtirishda (populyatsiya modellarida, investitsiya daromadlari tahlilida),
- Sun‘iy intellekt va mashinali o‘rganish algoritmlarida (gradientni hisoblashda, optimallashtirishda)

keng qo‘llaniladi. Bundan tashqari, integral hisoblash usullari zamonaviy hisoblash paketlari — MATLAB, Python (NumPy, SciPy), Mathematica, Maple, R kabi dasturiy muhitlarda integratsiya algoritmlarining asosini tashkil qiladi.

Tarixan integral tushunchasi XVII asrda Nyuton va Leybnits tomonidan mustaqil ravishda ishlab chiqilgan bo‘lib, bu tushuncha keyinchalik Riemann, Lebeg, Stiltjes va boshqa matematiklar tomonidan chuqurlashtirilgan. Aynan Riemann integralining taqribiy ko‘rinishlari, xususan, to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli integral tushunchasini dastlabki o‘rganuvchilar uchun intuitiv va aniq anglash imkonini beradi. Shuningdek, bu metodni real hayotdagi amaliy masalalarga tadbiiq qilish imkoniyati uning nazariy emas, balki amaliyotda ham muhim ahamiyatga ega bo‘lishini ko‘rsatadi. Ushbu maqolada aniq integralni to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli yordamida hisoblashning nazariy asoslari, algoritmik bosqichlari, hisoblashdagi xatoliklarni aniqlash va ularni kamaytirish usullari, shuningdek, turli oraliqlardagi segmentlar sonining hisob natijasiga ta‘siri o‘rganiladi. Shuningdek, turli funksiyalar uchun hisoblash amaliyotlari bajariladi va natijalar boshqa taqribiy metodlar bilan (masalan, trapetsiya usuli yoki Simpson usuli bilan) solishtiriladi.

Eng sodda kvadratur formulalar: to‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari. Eng sodda kvadratur formulalarni oddiy muloxazalar asosida qurish mumkin. Aytaylik,

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralni hisoblash talab qilinsin. Agar qaralayotgan oraliqda $f(x) \approx \text{const}$ bo'lsa, u vaqtda

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

To'g'ri to'rtburchaklar usuli algoritmi:

1. $h = \frac{b-a}{n}$ orqali bo'linish qadamini hisoblaymiz;

2. $x_0 = a + \frac{h}{2}, x_k = x_{k-1} + h, k = 1, 2, 3, \dots, n$ nuqtalarni belgilab olamiz;

3. $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan kesishgunga qadar perpendikulyar o'tkazamiz va kesishish nuqtalarning ordinatalarini quyidagicha

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

belgilaymiz;

4. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalardan chapga qarab gorizont ravishda mos holda $(x_0, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_n)$ nuqtalargacha bo'lgan kesma o'tkazamiz va hosil qilingan har bir to'g'ri to'rtburchak yuzini topamiz:

$$y_1 h, y_2 h, \dots, y_n h$$

5. n ta to'g'ri to'rtburchak yuzini qo'shamiz:

$$S = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Bu to'g'ri to'rtburchaklar formulasidir. To'g'ri to'rtburchaklar formulasining o'ng tomonidagi ifoda berilgan integralga intiladi. Biroq, fiksirlangan h da uning har biri berilgan integraldan $R_n(f)$ kattalikka farq qiladi. Berilgan absolyut xatodan n parameter tanlanadi va shuningdek, h qadam $|R_n(f)| < \varepsilon$ tengsizlikdan topiladi.

$R_n(f)$ kattalik

$$R_n(f) = \frac{b-a}{2n} f'(\zeta)h^2, \zeta \in [a, b]$$

tenglik orqali xarakterlanadi.

Misol. $n = 10$ integralni $n = 10$ bo'lganda hisoblang.

Yechish.

1. $[0, 1]$ kesmani $h = \frac{b-a}{n} = 0,1$ qadam bilan 10 ta bo'lakka bo'lib olamiz;

2. Quyidagilarni hisoblaymiz:

bu yerda: $x_0 = a + \frac{h}{2}$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$x_0 = 0,05, x_1 = 0,15, x_2 = 0,25, x_3 = 0,35, x_4 = 0,45, x_5 = 0,55, x_6 = 0,65, x_7 = 0,75, x_8 = 0,85, x_9 = 0,95, x_{10} = 0,105$

3. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$y_1 = f(x_1) = 0.014944$, $y_2 = f(x_2) = 0.24740$, $y_3 = f(x_3) = 0.34290$, $y_4 = f(x_4) = 0.43497$,

$y_5 = f(x_5) = 0.52269$, $y_6 = f(x_6) = 0.60519$, $y_7 = f(x_7) = 0.68164$, $y_8 = f(x_8) = 0.75128$,

$y_9 = f(x_9) = 0.81342$, $y_{10} = f(x_{10}) = 0.86742$

$$\int_0^1 \sin x dx = h(y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0.1 * (0.14944 + 0.24740 + \dots + 0.86742) = 0.541635$$

$\int_a^b f(x) dx$ aniq integralni to'g'ri to'rtburchaklar usuli yordamida hisoblashning

C#dagi dasturi:

`using System;`

`class Program`

`{`

`static void Main()`

`{`

`double h = 0.1;`

`int n = 10;`

`double x1 = 0.15; // boshlang'ich nuqta siz aytgandek`

`double sum = 0.0;`

`for (int i = 0; i < n; i++)`

`{`

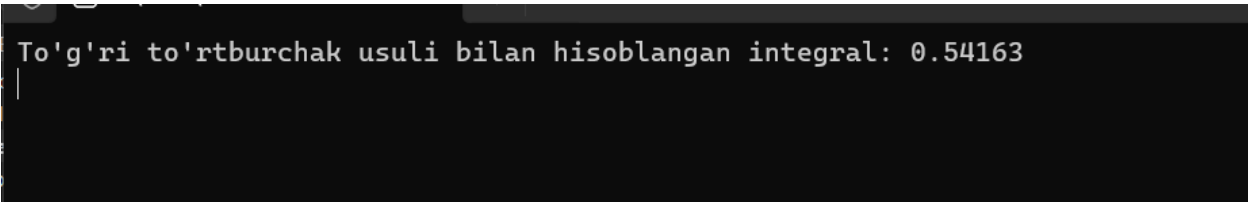
`double xi = x1 + i * h; // xi qiymati`

`double yi = Math.Sin(xi); // sin(xi)`

`sum += yi; // yig'indi }`

```
double result = h * sum;  
Console.WriteLine("To'g'ri to'rtburchak usuli bilan hisoblangan integral: " +  
result.ToString("F5"));  
Console.ReadKey(); }}
```

Natija:



```
To'g'ri to'rtburchak usuli bilan hisoblangan integral: 0.54163
```

Aniqlik integral hisoblash matematik analizning muhim bo‘lagidir va ko‘plab tabiiy hamda muhandislik jarayonlarini tahlil qilishda keng qo‘llaniladi. Biroq ko‘pgina hollarda integralning aniq analitik yechimi mavjud emas yoki topilishi murakkab bo‘ladi. Shunday vaziyatlarda integral qiymatini taqribiy hisoblash usullari, xususan, to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli, keng qo‘llaniladi. Ushbu usul oraliqni kichik suboraliqlarga bo‘lib, har bir segmentda funksiya qiymatini o‘rta nuqtadagi yoki oraliqning bir uchidagi qiymat bilan almashtirib, hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalarining yig‘indisini hisoblashga asoslanadi. Soddaligi va dasturiy amalga oshirilishining qulayligi uni ko‘plab sohalarda keng qo‘llanilishiga sabab bo‘ladi. Zamonaviy texnologiya va sanoatda to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli muhandislik va fizikada, masalan, termodinamika va issiqlik uzatishda, mexanika sohasida jismlarning deformatsiyasi va harakatini tahlil qilishda, shuningdek, elektr va elektronika sohasida elektr maydonlari va signallarni qayta ishlashda faol foydalaniladi. Bundan tashqari, kompyuter grafikasi va raqamli tasvirlash sohasida, ayniqsa sirt yuzalarini modellashtirish va yoritishni hisoblash jarayonlarida ushbu usul tezkor va samarali hisoblash vositasi sifatida xizmat qiladi.

Iqtisodiyot va moliya sohalarida, masalan, moliyaviy risklarni baholash, opsiya narxlarini hisoblashda, shuningdek, biologiya va tibbiyotda populyatsiyalar o‘sishi va dori vositalarining organizmdagi tarqalishini modellashtirishda integral hisoblashlar keng qo‘llaniladi. Bu sohalarda to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli tezkor va ishonchli natijalar olish uchun muhim vosita hisoblanadi. Bundan tashqari, MATLAB, Python kabi zamonaviy dasturlash muhitlari va ilmiy hisoblash paketlari to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulini standart taqribiy integral hisoblash algoritmlari sifatida o‘z ichiga olgan. Bu usul katta hajmdagi ma’lumotlarni raqamli qayta ishlashda va matematik modellarni simulyatsiya qilishda samarali qo‘llaniladi.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar usulining eng asosiy afzalligi uning oddiyligi va dasturlashda qulayligi bo‘lib, ayniqsa real vaqtli tizimlarda va resurslar cheklangan qurilmalarda keng

qo‘llanilishiga imkon beradi. Shuning uchun, hozirgi kunda ushbu usul sanoatning turli sohalarida, jumladan, IoT, sensor tizimlari va raqamli signal qayta ishlashda dolzarb hisoblanadi.

XULOSA

To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli aniq integralni taqribiy hisoblashda eng oddiy va samarali usullardan biridir. Ushbu usul integrallash jarayonini oraliqni teng bo‘laklarga bo‘lib, har bir bo‘lakda funksiya qiymatini oraliqning o‘rta nuqtasi yoki chekkalaridan biri bo‘yicha qabul qilib, hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzalarining yig‘indisi sifatida ifodalaydi. Bu yondashuvning asosiy ustunligi – soddaligi va oson dasturlanishidir, bu esa uni ko‘plab ilmiy va texnik sohalarda keng qo‘llanilishga olib keladi.

Zamonaviy texnologik rivojlanish davrida to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli o‘zining amaliy qo‘llanilish sohalari bilan ajralib turadi. Muhandislik va fizika sohalarida issiqlik uzatish, harakat nazariyasi, elektr maydonlarini modellashtirish kabi jarayonlarda integral hisoblashning taqribiy usullari zarurdir. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli bu jarayonlarni samarali va aniq hisoblashga imkon beradi. Shuningdek, kompyuter grafikasi va raqamli tasvirlashda yoritish, sirt yuzalarini modellashtirish uchun integral qiymatlarni hisoblashda keng qo‘llaniladi.

Iqtisodiyot va moliya sohalarida murakkab moliyaviy instrumentlar va risklarni tahlil qilishda integral hisoblashning taqribiy usullari, jumladan, to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli, muhim ahamiyat kasb etadi. Bundan tashqari, biologiya va tibbiyotda populyatsiyalar dinamikasi, dori vositalarining organizmdagi taqsimoti kabi jarayonlarni modellashtirishda integral hisoblash zarurati mavjud. Bu sohalarda to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli tez va ishonchli natijalar olish imkonini beradi.

Zamonaviy dasturiy ta’minot muhitlari, jumladan MATLAB, Python va R kabi ilmiy hisoblash paketlari to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulini standart integral taqribiy hisoblash algoritmlari qatoriga kiritgan. Bu usulning kam resurs talab qilishi va hisoblash tezligi uni katta hajmdagi ma’lumotlarni qayta ishlashda va ilmiy tadqiqotlarda afzal variantga aylantiradi. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli ilmiy-texnik sohalarda murakkab integral hisoblarini soddaga, tez va aniq bajarish imkonini beruvchi samarali vositadir. U nafaqat matematik modellashtirish va simulyatsiya uchun, balki amaliy texnologik jarayonlarda ham dolzarb hisoblanadi. Ushbu usulning qo‘llanilishi hozirgi kunda ilm-fan va texnika taraqqiyotining ajralmas qismi bo‘lib, turli sohalarda yuqori samaradorlik va natijadorlikni ta’minlashda muhim rol o‘ynaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole.
2. Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley.
3. Stoer, J., & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer.
4. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education.
5. Kiusalaas, J. (2010). *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge University Press.
6. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
7. Ibragimov, N. H. (2010). *Differential Equations and Their Applications*. Springer.
8. Isroilov M. (2008). *Hisoblash Metodlari*.