# PARVOZ TRAYEKTORIYASINI ANIQLASHDA SONLI INTEGRATSIYA USULLARINING QO'LLANILISHI

**Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich**
*Farg'ona davlat universiteti katta o'qituvchisi*
ismoilovaxrorjon@yandex.com
**O'ktamjonova Maxfirat Ikromjon qizi**
*Farg'ona davlat universiteti talabasi*
mahfiratoyoktamjonova@gmail.com

**Annotatsiya:** *Mazkur maqolada parvoz trayektoriyasini aniqlashda sonli integratsiya usullarining ahamiyati tahlil qilinadi. Harakat tenglamalarining analitik yechimi mavjud bo'lmagan hollarda sonli yondashuvlardan foydalanish zarurati yuzaga keladi. Ayniqsa, parvoz trayektoriyasining hisob-kitoblarida vaqt bo'yicha bog'liq bo'lgan tezlik va koordinatalarni aniqlash uchun sonli integratsiya metodlari, xususan, Eyler usuli, Runge-Kutta usullari keng qo'llaniladi. Ushbu maqolada ushbu usullar nazariy jihatdan bayon qilinib, ularning trayektoriya hisoblashdagi samaradorligi va qo'llanish imkoniyatlari yoritilgan. Sonli usullarning barqarorligi, aniqligi va amaliyotdagi ahamiyati muhokama qilinadi.*

**Kalit so'zlar:** *Sonli integratsiya, parvoz trayektoriyasi, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, harakat tenglamalari, sonli usullar, trayektoriya modellashtirish, hisoblash fizikasi.*

**Abstract:** *This article analyzes the importance of numerical integration methods in determining the flight trajectory. In cases where the analytical solution of motion equations is not available, the necessity of numerical approaches arises. In particular, numerical integration methods such as the Euler method and Runge-Kutta methods are widely used to calculate velocity and coordinates that depend on time in flight trajectory computations. This paper presents a theoretical overview of these methods and highlights their effectiveness and applicability in trajectory calculations. The stability, accuracy, and practical significance of numerical methods are also discussed.*

**Keywords:** *Numerical integration, flight trajectory, Euler method, Runge-Kutta method, equations of motion, numerical methods, trajectory modeling, computational physics.*

**Аннотация:** *В данной статье анализируется значение численных методов интегрирования при определении траектории полёта. В случаях, когда аналитическое решение уравнений движения отсутствует, возникает необходимость использования численных подходов. В частности, для расчёта скорости и координат, зависящих от времени, широко применяются численные* *методы интегрирования, такие как метод Эйлера и методы Рунге-Кутты. В статье даётся теоретическое обоснование этих методов, а также освещаются их эффективность и применимость при моделировании траектории. Также рассматриваются устойчивость, точность и практическая значимость численных методов.*

**Ключевые слова:** *Численное интегрирование, траектория полёта, метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, уравнения движения, численные методы, моделирование траектории, вычислительная физика.*

Parvoz trayektoriyasini aniqlash harbiy, aviatsiya va kosmik tadqiqotlarda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan muammo hisoblanadi. Harakat qiluvchi jismlarning trayektoriyasini aniq hisoblash uchun ularning harakat tenglamalarini yechish zarur. Bu tenglamalar ko‘pincha differensial tenglamalar ko‘rinishida bo‘lib, ularni analitik usullar bilan yechish barcha holatlarda mumkin emas. Ayniqsa, murakkab kuchlar ta’sirida harakatlanayotgan jismlarning trayektoriyasini oldindan aniqlash qiyin bo‘ladi. Shu sababli, sonli usullar yordamida trayektoriyani hisoblash zamonaviy hisoblash texnologiyalari yordamida keng qo‘llaniladi.

Sonli integratsiya usullari differensial tenglamalarni taxminiy yechimlar orqali hisoblash imkonini beradi. Bu usullar orqali vaqt bo‘yicha harakatning o‘zgarishini qadam-baqadam kuzatish mumkin bo‘ladi. Eng sodda sonli integratsiya usullaridan biri Eyler usuli bo‘lib, u harakat tenglamalarini yechishda dastlabki nuqtadan boshlab kichik qadamlar bilan natijalarni hisoblaydi. Biroq, Euler usuli ba’zan aniqligi past va barqarorligi kam bo‘lishi mumkin. Shuning uchun, ko‘proq aniqlik va barqarorlik talab qiladigan hollarda Runge-Kutta usullari keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, to‘rtinchi darajali Runge-Kutta usuli hisoblashda juda samarali va aniq natijalar beradi.

Parvoz trayektoriyasini modellashtirishda sonli integratsiya usullarining qo‘llanilishi fizik qonunlar va aerodinamik ta’sirlarni hisobga olib, real sharoitda harakatni hisoblash imkonini beradi. Bu usullar yordamida tezlik, joylashuv koordinatalari, tezlanish va boshqa parametrlarning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi aniqlanadi. Natijada, samolyot yoki raketaning harakat trayektoriyasi aniq prognoz qilinadi va bu ma’lumotlar rejalashtirish, boshqarish va xavfsizlikni ta’minlash uchun asos bo‘ladi.

Mazkur maqolada parvoz trayektoriyasini aniqlashda sonli integratsiya usullarining nazariy asoslari, asosiy metodlari hamda ularning amaliy qo‘llanilishi haqida to‘liq ma’lumot beriladi. Shuningdek, sonli usullarning barqarorligi, aniqligi va qo‘llanilish sohalari tahlil qilinadi. Maqolaning maqsadi — sonli integratsiya usullarining parvoz trayektoriyasini hisoblashdagi o‘rni va ahamiyatini yoritishdir.

**Parvoz trayektoriyasining matematik modeli**

Parvoz trayektoriyasini aniqlash uchun jismning harakati fizik qonunlar, xususan Nyutonning harakat qonunlari asosida tavsiflanadi. Eng sodda holatda, havo qarshiligi va boshqa tashqi kuchlar e’tiborga olinmagan parvoz modellashtiriladi. Bunday holatda, jismlarning harakat trayektoriyasi klassik mexanika formulalari orqali ifodalanadi. Agar jism boshlang‘ich tezlik bilan $v_0$ harakat qilsa va yo‘nalishi $\theta$ burchak ostida bo‘lsa, uning vaqtga bog‘liq koordinatalari quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$x(t) = v_0 \bullet \cos(\theta) \bullet t$$

$$y(t) = v_0 \bullet \sin(\theta) \bullet t - \frac{1}{2} g t^2$$

Bu yerda

$x(t)$, $y(t)$ — harakat qiluvchi jismning vaqtga bog‘liq kordinatalari,

$v_0$ — boshlang‘ich tezlik,

$\theta$ — parvoz burchagi,

$g = 9.8 m/s^2$ — yer yuzidagi erkin tushish tezlanishi.

Ammo real sharoitda havo qarshiligi, shamol ta’siri va boshqa tashqi omillar mavjud bo‘lib, ular parvoz trayektoriyasiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Havo qarshiligi jismlarning tezligini kamaytiradi, parvoz masofasini qisqartiradi va trayektoriyaning shaklini o‘zgartiradi. Bu omillarni hisobga olish uchun oddiy formulalar o‘rniga differensial tenglamalar tizimi qo‘llaniladi. Ammo real hayotda havo qarshiligi muhim omil bo'ladi. Havo qarshiligi jismning bosqichga qarab ortadi va uni sekinlashtirish. Ko'pincha u kvadratik qarshilik sifatida modellashtiriladi:

$$F_d = -k \cdot v^2$$

Bu yerda:

$F_d$ — havo qarshilik kuchi,

$k$ — qarshilik koeffitsienti (muhitga bog'liq),

$v$ — jismning bosqich.

Havo qarshiligi kuchi ko‘pincha tezlikning kvadratiga proportsional bo‘lib, qarshilik koeffitsienti $k$ yordamida ifodalanadi. Jismning tezlik komponentlari $v_x$ va $v_y$ uchun quyidagi differensial tenglamalar tizimi tuziladi:

$$\frac{dv_x}{dt} = -k \bullet v \bullet v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - k \bullet v \bullet v_y$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y$$

Bu yerda:

$v_x, v_y$ — harakatning tegishli yo‘nalishlardagi tezlik kompotentlari,

$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^2}$ — jismning umumiy tezligi,

$k$ — havo qarshiligi koeffitsiyenti.

Bu differensial tenglamalar tizimi analitik tarzda yechilishi juda murakkab yoki imkonsiz bo‘lishi mumkin. Shuning uchun ushbu tenglamalar sonli usullar yordamida, ya’ni kompyuter orqali taxminiy yechimlar topiladi.

Sonli integratsiya usullari

Differensial tenglamalar tizimini yechish uchun ko‘plab sonli usullar mavjud bo‘lib, ularning eng ko‘p ishlatiladiganlari Eyler usuli va Runge-Kutta usullari hisoblanadi.

Eyler usuli

Eyler usuli eng sodda sonli yechim usuli bo‘lib, differensial tenglamani kichik vaqt qadamlariga bo‘lib, har bir qadamda natijani hisoblaydi. Agar $y(t)$ funksiyaning qiymati bo‘lsa, va uning hosilasi $y'(t) = f(t, y)$ bo‘lsa, Euler usuli quyidagi formulaga asoslanadi:

$$y_{n+1} = y_n + h \bullet f(t_n, y_n)$$

Bu yerda:

$h$ — vaqt qadamining o‘lchami,

$y_n$ — $t_n$ vaqt nuqtasidagi yechim.

Eyler usuli hisoblashda juda sodda va tez bajariladi, ammo aniqligi past va uzoq vaqt intervalida yig‘ilgan xatoliklar ko‘p bo‘lishi mumkin. Shu sababli murakkab tizimlarda va yuqori aniqlik talab qilinganda u yetarli emas.

Runge-Kutta usuli (to‘rtinchi tartibli)

Runge-Kutta usullari Eyler usulining aniqligini oshirish uchun takomillashtirilgan algoritmlar to‘plamidir. Eng mashhuri to‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usulidir, u quyidagi formulalar asosida ishlaydi:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Natija:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Runge-Kutta usuli yuqori aniqlikka ega, xatoliklar nisbatan kichik bo‘ladi va murakkab fizik tizimlarni hisoblashda keng qo‘llaniladi.

3. Amaliy qo‘llanilishi: parvoz trayektoriyasini hisoblash misoli

Parvoz trayektoriyasini sonli integratsiya yordamida modellashtirish uchun dasturlash tillarida (masalan, Python) Runge-Kutta usuli asosida hisoblash algoritmi tuziladi. Boshlang‘ich shartlar sifatida boshlang‘ich tezlik, burchak va havo qarshiligi koeffitsienti olinadi:

Boshlang‘ich tezlik: $v_0 = 50 m/s$

Parvoz burchagi : $\theta = 45^\circ$

Havo qarshilik koeffitsienti: $k = 0.01$

Dastlab, tezlikning va yo‘nalishidagi komponentlari hisoblanadi:

$$v_{x0} = v_0 \bullet \cos(\theta)$$

$$v_{y0} = v_0 \bullet \sin(\theta)$$

Har bir vaqt qadamida Runge-Kutta usuli orqali yangi qiymatlar — koordinatalar va tezlik komponentlari hisoblanadi. Hisoblash jarayoni jism $y = 0$ holatiga (yerga urilish) yetguncha davom ettiriladi.

Natijada, parvoz trayektoriyasining grafik ko‘rinishi olinadi. Havo qarshiligi ta’siri bo‘lsa, trayektoriya parabolik shakldan farq qiladi, maksimal balandlik va parvoz masofasi kamayadi.

Sonli integratsiya usullarida quyidagi xatoliklar yuzaga keladi:

Diskretlashtirish xatoligi — vaqt qadamining $h$ kattaligi natijasida yuzaga keladi. Qadam kichik bo‘lsa, xatolik kamayadi, ammo hisoblashlar ko‘p vaqt oladi.

Yig‘ilish xatoligi — har bir qadamda yuzaga kelgan xatoliklar yig‘ilib, umumiy natijaga ta’sir qiladi.

Model xatoligi — fizik sharoitlarning soddalashtirilishi (masalan, shamol, havo zichligi o‘zgarishi) haqiqiy natijadan farq qilishi mumkin.

Runge-Kutta usullari Euler usuliga nisbatan yuqori aniqlik va barqarorlikka ega, lekin hisoblash resurslarini ko‘proq talab qiladi.

Xulosa

Parvoz trayektoriyasini modellashtirish — fizika va matematik analiz sohalarining qo‘llanilishi bo‘lib, amaliyotda muhim ahamiyatga ega. U ballistik harakatni tushunish, raketa yoki snaryad yo‘nalishini aniqlash, aerodinamika va sportda (masalan, to‘pning harakatini aniqlash) keng qo‘llaniladi. Matematik model harakatni differensial tenglamalar orqali aniq tavsiflaydi. Biroq real hayotdagi fizik kuchlar va sharoitlar (havo qarshiligi, shamol, tortishish o‘zgarishi) modellarni murakkablashtiradi. Shu sababli, bunday tizimlarni tahlil qilishda sonli integratsiya usullarining ahamiyati katta bo‘ladi.

Runge-Kutta kabi ilg‘or usullar bizga yuqori aniqlik bilan trayektoriyani hisoblash imkonini beradi. Kompyuter vositalarining jadal rivojlanishi ushbu hisob-kitoblarni real vaqtda yoki yuqori aniqlikda bajarish imkonini yaratdi. Yakun qilib aytganda, trayektoriya modellashtirish va uni sonli yechish usullari nafaqat nazariy bilimlar asosini tashkil etadi, balki texnika, aeronavtika, robototexnika, dron boshqaruvi va harbiy sohalarda ham keng qo‘llaniladi. Bu mavzu orqali talabalar matematik model, algoritmik yondashuv va sonli hisoblashlar o‘rtasidagi bog‘liqlikni amalda o‘rganadilar.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Matveeva A.I. *Mexanika: Oliy o‘quv yurtlari uchun darslik*. — Moskva: Oliy maktab, 2009. — 512 bet.
2. Sedov L.I. *Suyuqlik va gaz mexanikasi*. — Moskva: Fan, 1985. — 672 bet.
3. Kaplanskiy L.Ya. *Differensial tenglamalarni yechishning sonli usullari*. — Moskva: FizMatLit, 2004. — 368 bet.
4. Butcher J. *Differensial tenglamalar va sonli metodlar*. — Moskva: Mir, 1987. — 438 bet.
5. Demidovich B.P., Maron I.A. *Hisoblash matematikasi*. — Moskva: Mir nashriyoti, 1976.
6. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis*. — 10th edition. — Boston: Cengage Learning, 2015. — 888 p.
7. Chapra S.C., Canale R.P. *Numerical Methods for Engineers*. — 7th edition. — New York: McGraw-Hill Education, 2014. — 960 p.
8. Suli E., Mayers D. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. — Moskva: LKI, 2010. — 352 bet.
9. Uspenskiy V.A. *Fizika: Texnikumlar uchun darslik*. — Moskva: Oliy maktab, 2007. — 576 bet.
10. Axmedov A.A., Xabibullayev P.S. *Fizika va mexanika asoslari*. — Toshkent: Fan, 2003. — 424 bet.
11. Yo‘ldoshev B.Yu., Axmedova Z.I. *Hisoblash matematikasi*. — Toshkent: O‘zbekiston, 2012. — 288 bet.
12. G‘ofurov M., To‘ychiyev A. *Dasturlash asoslari va sonli usullar*. — Toshkent: TDPU nashriyoti, 2019. — 340 bet.