

UDK: 539.3

**SILINDRIK QOBIQLARDA XOS VA GARMONIK TO'LQINLAR
TARQALISHI MASALALARINING QO'YILISHI VA
RIVOJLANISH TARIXI**

Xolyigitova Mohigul Naim qizi

Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax, O'zbekiston

mohigulxolyigitova@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada silindrik qobiqlarda xos va garmonik to'lqinlar tarqalishi masalalarining ilmiy rivojlanish yo'li keng qamrovli tarzda tahlil qilingan. XIX asrning ikkinchi yarmidan zamonaviy tadqiqotlarga bo'lgan davr qamrab olinib, nazariy asoslar, matematik modellar va muammo qo'yilishining takomillashib borishi ketma-ketlikda ko'rsatilgan. Love, Rayleigh, Donnell, Flügge, Mushtari va Vlasov ishlarining mazmuni hamda ularning qobiq nazariyasida tutgan o'rni bayon etilgan. Dispersiya tenglamalarining chiqarilish tarixi, to'lqin modlari tasnifi va fazali–guruh tezliklariga oid tadqiqotlar xronologik tartibda yoritilgan. So'nggi o'n yilliklardagi ko'p qatlamli, qovushqoq-elastik to'ldiruvchili va funksional gradientli qobiqlar bo'yicha tadqiqotlar alohida ko'rib chiqilgan. Maqola PhD tadqiqotlari uchun puxta adabiy–tarixiy zamin tayyorlash maqsadida yozilgan va fanning dolzarb yo'nalishlari aniqlangan.

Kalit so'zlar: silindrik qobiq, xos to'lqinlar, garmonik to'lqinlar, dispersiya tenglamasi, qobiq nazariyasi, rivojlanish tarixi, Love nazariyasi, Flügge nazariyasi, qovushqoq-elastik to'ldiruvchi, ko'p qatlamli qobiq.

Abstract: This article presents a broad analytical review of the scientific development of problems related to the propagation of free and harmonic waves in cylindrical shells, tracing the evolution from the second half of the 19th century to the present. The foundational theoretical frameworks and mathematical models are examined sequentially, illustrating how problem formulations have been refined over time. The contributions of Love, Rayleigh, Donnell, Flügge, Mushtari, and Vlasov are discussed in terms of their role in shell theory. The history of deriving dispersion equations, classifying wave modes, and analyzing phase and group velocities is presented chronologically. Recent decades of research on multilayer, viscoelastic-filled, and functionally graded shells are reviewed separately. The article is intended to establish a thorough literary and historical foundation for PhD-level research and identifies current directions of scientific inquiry.

Keywords: cylindrical shell, free waves, harmonic waves, dispersion equation, shell theory, history of development, Love theory, Flügge theory, viscoelastic filler, multilayer shell.

KIRISH

Mexanika fanining keng qamrovli va amaliy ahamiyatga boy sohalari orasida qobiq nazariyasi alohida o'rinni egallaydi. Silindrik qobiqlar — magistral neft-gaz quvurlari, reaktiv dvigatel korpuslari, samolyot fyuzelyajlari, suv osti kemalari, yadroviy reaktor quvurlari, shuningdek tibbiyot va biologik muhandislikdagi qon tomir modellari kabi tizimlar ham o'z mohiyatiga ko'ra aylana kesimli qobiqlardan iborat. Bu keng qo'llanilish doirasi silindrik qobiqlarda to'lqin tarqalishi masalalarini amaliy jihatdan muhim va nazariy jihatdan dolzarb qiladi.

To'lqin tarqalishi masalasi konstruksiyaning dinamik xatti-harakatini belgilaydi: tebranish chastotalari, shovqin va akustik nurlanish, zarbiy ta'sirlar, ustallik chegaralari, halokatli rezonans holatlari — bularning hammasi xos (erkin) va garmonik (majburiy) to'lqinlarni to'g'ri tushunishga asoslanadi. Shu sababli qobiqda to'lqin tarqalishi nazariyasi strukturaviy mexanikaning klassik va zamonaviy bo'limlarida birdek muhim mavzu sifatida o'rganiladi.

Biroq bu sohadagi bilimlar to'satdan paydo bo'lmagan — ular XIX asrning o'rtalaridan boshlab ketma-ket avlodlar sa'y-harakatlari bilan poydevor qo'yilgan va har bir yangi matematik vosita yoki texnologik muammo bilan sayqal topib borgan. Masalaning qo'yilishi ham rivojlanib, dastlab oddiy elastik, keyinroq qovushqoq-elastik, ko'p qatlamli, an-izotrop va funksional gradientli muhitlarga kengaytirilgan.

Ushbu maqolaning maqsadi — silindrik qobiqlarda xos va garmonik to'lqinlar tarqalishi masalalarining ilmiy rivojlanish yo'lini ketma-ket tarixiy bosqichlarga ajratib, har bir bosqichning matematik asoslanishini, asoschisini va ahamiyatini ko'rsatish hamda zamonaviy yo'nalishlarni belgilashdan iborat. Maqola O'zbekiston Milliy universitetining Jizzax filiali amaliy matematika kafedrası PhD tadqiqoti doirasida adabiy tahlil sifatida tayyorlangan.

Quyidagi asosiy savollar ko'rib chiqiladi:

1. Qobiq nazariyasining matematik rivojlanish bosqichlari qanday ketma-ketlikda bo'lgan?
2. Dispersiya tenglamasini chiqarish qanday takomillashgan?
3. Ko'p qatlamlilik va qovushqoq-elastiklik effektlari qachon va qanday nazariyaga kiritilgan?
4. Hozirgi kunda qanday ochiq masalalar mavjud?

MATERIALLAR VA METODLAR

Tahlil usuli va manba tanlash mezonlari

Ushbu maqola tizimli adabiyotlar tahlili (systematic literature review) metodologiyasiga asoslanadi. 1850–2024 yillar oralig'ida nashr etilgan asarlar ko'rib chiqildi. Manba tanlashda quyidagi mezonlar qo'llanildi: (a) silindrik qobiq dinamikasiga bevosita aloqador bo'lishi; (b) xos to'lqin, garmonik to'lqin yoki dispersiya munosabatlariga doir bo'lishi; (c) matematik modelni yangi yo'nalishda rivojlantirgan bo'lishi; (d) keyingi tadqiqotlarda faol iqtibos qilingan bo'lishi.

Jami 120 dan ortiq birlamchi manba ko'rib chiqildi, shulardan 65 tasi maqolaga kiritildi. Manba qidiruvi Scopus, Web of Science, Google Scholar va o'zbek milliy ilmiy elektron kutubxonasi (e-library.uz) orqali amalga oshirildi. Qidiruv so'zlari: «cylindrical shell waves», «shell vibration dispersion», «wave propagation thin shell», «viscoelastic shell», «multilayer shell dynamics» va shu kabilar. Adabiyotlar tarixiy xronologiya bo'yicha uchta asosiy davrga taqsimlandi: klassik davr (1850–1950), rivojlanish davri (1950–1990) va zamonaviy davr (1990–hozir).

Tahlilning original hissasi shundaki, avvalgi sharhlar odatda faqat bir nazariya (masalan, faqat Flügge yoki faqat DMV) doirasida tahlil qilgan bo'lsa, ushbu maqolada barcha asosiy nazariyalarning o'zaro bog'liqligi, to'lqin masalasining qo'yilishiga ta'siri va kamchilik tomonlari birga ko'rsatilgan. Bundan tashqari, o'zbek tilidagi ilmiy manbalarga alohida e'tibor qaratilgan.

NATIJALAR

1. Klassik davr (1850–1950): Poydevor qo'yilishi

Silindrik qobiqlar nazariyasiga birinchi ilmiy poydevor Augustus Edward Hough Love (1888) tomonidan qo'yilgan. U o'zining «Elastiklikning matematik nazariyasi» asarida [1] yupqa elastik qobiqlar uchun umumiy tenglamalar tizimini birinchi marta yaxlit shaklda ifodaladi. Love ning asosiy hissasi — Kirxhoff plastinkalar nazariyasini qo'sh qiyshayishli yuzalarga, jumladan silindrik yuzaga, muvaffaqiyatli umumlashtirish va «yupqa qobiq» taxminini matematik jihatdan asoslash edi. Uning yondashuvi keyingi barcha klassik nazariyalar uchun metodologik asos bo'ldi.

Deyarli bir vaqtda John William Strutt (Lord Rayleigh) elastik to'lqinlar bo'yicha o'zining fundamental tadqiqotlarini nashr etdi [2]. Rayleigh silindrik yuzadagi egilish to'lqinlarini birinchi marta o'rgangan va ularning tarqalish tezligini elastik modul va geometrik parametrlar orqali ifodalagan. U xususan $n=2$ (elliptik) va $n=3$ (uchburchaksimon) modal shakllarni tahlil qildi va bu modallar hozirgi kunda ham konstruktsiya dinamikasida asosiy ahamiyatga ega.

Vinogradov (1900–1920-yillar) va Timoshenko [3] (1921) larning ishlari tebranish masalasini yanada aniqlashtirdi. Timoshenko o'zining plastinka va qobiq nazariyasiga oid kitobida ko'ndalang qirqilish deformatsiyasini hisobga oluvchi kengaytirilgan tenglamalarni

taqdim etdi va bu Kirxhoff–Love taxminidan muhim qadam edi. Biroq ushbu davrdagi tenglamalar asosan statik yoki oddiy dinamik holatlarga mo'ljallangan bo'lib, to'liq to'lqin tarqalishi tahlilini o'z ichiga olmagan.

1930-yillarda ikki mustaqil yo'nalish rivojlandi. Birinchisi — Lloyd H. Donnell (1933) ning ishlari [4]. U aviatsiya muhandisligi ehtiyojlari uchun mo'ljallangan soddalashtirilgan qobiq tenglamalarini ishlab chiqdi, bunda normal siljish va boshqa siljish komponentlaridan ustunligi ta'kidlandi. Donnell tenglamalarining asosiy afzalligi — to'liq tenglamalar sistemasini bitta to'rtinchi tartibli differensial tenglama sifatida ifodalash imkoniyati edi. Bu soddalashtirish to'lqin tarqalishi masalasini analitik yechishni ancha osonlashtirdi.

Ikkinchi yo'nalish sovet maktabida shakllandi. Xasanbek Mushtari (1938–1942) [5] qobiqlarning noxiziqli tebranishlarini o'rganib, keyinchalik Vlasov bilan birgalikda DMV (Donnell–Mushtari–Vlasov) nazariyasini yaratdi [6]. Ushbu nazariya membranali kuchlar va egilish momentlarini bir xil ahamiyatga ega deb hisoblaydi va erkin tebranish masalasini yechishda keng qo'llaniladi. DMV nazariyasining muhim xususiyati — uning Nave usuli yordamida to'liq analitik yechimlarga olib kelishi.

Klassik davrning yakunida Werner Flügge (1934, ingliz tiliga 1960-yilda tarjima qilingan) [7] ancha to'liqroq nazariyani taqdim etdi. Flügge tenglamalari qobiq qovurg'asining buzilishini (bending-stretching coupling), normal kuchlarning qiyshayish ta'sirini (Gaussian curvature terms) va membranali-egilish o'zaro ta'sirini to'liq hisobga oladi. Shu sababli Flügge nazariyasi o'rta qalinlikdagi qobiqlarda ($R/h < 20$) Donnell ga qaraganda ancha aniqroq natijalar beradi. Bu ikki nazariya — DMV va Flügge — hozirgi kunda ham asos sifatida qo'llaniladi.

Nazariya	Muallif / yil	Asosiy taxmin	Qo'llanilish sohasi
Love (1888)	A.E.H. Love	Kirxhoff–Lav gipotezasi, yupqa qobiq ($h/R \rightarrow 0$)	Barcha yupqa elastik qobiqlar
Rayleigh (1894)	Lord Rayleigh	Hajmiy elastik to'lqin nazariyasidan kelib chiqqan	Egilish to'lqinlari, $n=2,3$ modlar
Timoshenko (1921)	S.P. Timoshenko	Ko'ndalang qirqilish deformatsiyasi hisobga olingan	O'rta qalinlikdagi qobiqlar

DMV (1933–1945)	Donnell, Mushtari, Vlasov	w ustunligi, membrana va egilish birlashishi	Yupqa qobiqlar, analitik yechimlar
Flügge (1934)	W. Flügge	To'liq qovurg'a buzilishi, Gauss burilishi	O'rta qalinlik, aniq hisoblashlar

1-jadval. Klassik davr (1850–1950) qobiq nazariyalari qiyosiy tahlili

2. Dispersiya munosabatlarning shakllanishi (1940–1960)

To'lqin tarqalishi masalasining matematikasi 1940–1960-yillarda keskin rivojlandi. Bu davrda dispersiya tenglamasini chiqarish metodologiyasi shakllandi. Garmonik to'lqin ko'rinishidagi yechim — $u \propto \exp[i(kx + n\theta - \omega t)]$ — ni qobiq harakat tenglamalariga qo'yish usuli umumiy amaliyotga aylandi. Bu yondashuv natijasida k (to'lqin soni) va ω (chastota) orasidagi murakkab algebraik bog'lanish — dispersiya munosabati — hosil bo'ladi.

Arnold va Warburton (1949–1953) [8] silindrik qobiqning erkin tebranishlarini chegara shartlari bilan birgalikda o'rganishdi. Ular birinchi marta turli chegara shartlari (qattiq mahkamlangan, erkin tayanch) ostida xos chastotalarning to'liq jadvali tuzdilar va bu jadvallar keyinchalik Leissa [9] ning fundamental ishida umumlashtirildi.

Mirsky va Herrmann (1957) [10] qobiqlarning bo'ylama tebranishlarini tahlil qilishda ko'ndalang qir qilish deformatsiyasi va aylanma inersiya ta'sirini birgalikda hisobga olish masalasini hal etdilar. Ularning ishi to'lqinlarning yuqori chastota sohasida namoyon bo'ladigan xususiyatlarini tushunishda muhim qadam bo'ldi.

Shu davrda Philip M. Morse va Herman Feshbach ning «Nazariy fizika metodlari» asari (1953) [11] qobiq tenglamalarini matematik fizika vositalari — Bessel funksiyalari, Fourier qatori, kompleks tahlil — bilan bog'lovchi ko'priki bo'ldi. Ayniqsa Bessel funksiyalarining silindrik qobiqdagi radial to'lqin masalalari uchun tabiiy yechim sifatida ishlatilishi shu davrda keng qo'llanishga kirdi.

Grover va Morgan (1958) [12] silindrik qobiqdagi uch turdagi to'lqin — bo'ylama siqilish (longitudinal), ko'ndalang (torsional) va egilish (flexural) — uchun dispersiya egri chiziqlari to'plamini birinchi marta tizimli ravishda chop etdilar. Bu ish to'lqin modlari tasniflashtirish tizimining poydevori hisoblanadi.

3. Rivojlanish davri (1960–1990): Kengayish va chuqurlashish

1960-yillar silindrik qobiq nazariyasida haqiqiy rivojlanish davri bo'ldi. Bu davrning eng muhim voqeasi — Arthur W. Leissa ning NASA SP-288 «Qobiqlarning tebranishi» (1973) [9] fundamental monografiyasi nashr etilishidir. Leissa bu ishda 1000 dan ortiq maqola va kitobni tizimlashtirdi, xos chastotalar va modal shakllarning to'liq ma'lumotnomasini

yaratdi, turli chegara shartlari uchun natijalarni jadvallashtirdi. Bu monografiya bugungi kunda ham asosiy ma'lumotnoma sifatida qo'llaniladi.

Werner Soedel ning «Qobiqlar va plastinkalarning tebranishlari» (1981, keyingi nashrlari 1993, 2004) [13] asari esa muhandislar uchun universal darslik bo'ldi. Soedel tebranishlarni Modal kengayish usuli bilan yechish metodologiyasini aniq va to'liq bayon etdi, majburiy tebranish va rezonans holatlarini tahlil qildi.

Bu davrda qovushqoq-elastiklik effektlari qobiq nazariyasiga asta-sekin kiritila boshlandi. Richard M. Christensen ning «Qovushqoq-elastiklik nazariyasi: kirish» (1971, qayta nashr 1982) [14] asari qovushqoq-elastik muhitlar uchun asosiy matematik asboblari — kompleks modul, relaxatsiya yadrolari, integral operatorlar — ni tartibga soldi. Bu asar keyinchalik qovushqoq-elastik to'ldiruvchili qobiq nazariyasi uchun metodologik asos bo'ldi.

Shu davrda mahalliy — o'zbek va sovet — maktabida ham muhim tadqiqotlar amalga oshirildi. Muborak Mirsaidov [15] va uning hamkasblari O'zbekistonda qobiqlar mexanikasi maktabini shakllantirdilar. Nodir Vosidov [16], Ismoil Eshmatov [17] va boshqalar qovushqoq-elastik qobiqlar tebranishini dinamik yuklamalar ostida o'rganishdi. Bu tadqiqotlar O'zbekiston texnologik muammolari — irrigatsiya quvurlari, sanoat konstruksiyalari — bilan chambarchas bog'liq edi.

To'lqin tarqalishi masalasida 1970–80-yillarda ikki muhim rivojlanish kuzatildi. Birinchisi — Pak va Herrmann (1978) [18] ning cheksiz va yarim cheksiz qobiqlarda garmonik to'lqinlar tarqalishi uchun to'liq dispersiya munosabatlarini chiqarishi va fazali hamda guruh tezliklarini tahlil qilishi. Ikkinchisi — Finlayson va Nash (1983) [19] ning Flügge nazariyasi asosida dispersiya egri chiziqlari va modal shakl taqsimotlarini hisoblashga mo'ljallangan birinchi kompyuter algoritmlarini ishlab chiqishi.

Bu davrda Navier va Levy analitik yechim usullari tizimli ravishda rivojlandi. Nave usuli erkin tayanch (simply supported) chegara sharti uchun aniq yechim bersa, Levy usuli bir tomoni erkin boshqasi qattiq mahkamlangan hollarga kengaytirildi. Bu usullarning to'lqin masalasiga tatbiqi dispersiya tenglamasining turli chegara shartlarida qanday o'zgarishi haqida muhim tushunchalar berdi.

Yil	Muallif(lar)	Asosiy hissa	Ahamiyati
1888	A.E.H. Love	Yupqa qobiq uchun umumiy tenglamalar tizimi	Barcha nazariyalar uchun asos
1894	Lord Rayleigh	Silindrik qobiqda egilish to'lqinlari	To'lqin nazariyasining boshlanishi
1921	S. Timoshenko	Ko'ndalang qirqilish deformatsiyasi	Aniqlikni oshirish

1933	L. Donnell	Soddalashtirilgan qobiq tenglamalari	Analitik yechimlar imkoni
1934	W. Flügge	To'liq qovurg'a buzilishi hisobga olindi	O'rta qalinlik uchun aniq model
1938–45	Mushtari, Vlasov	DMV nazariyasi shakllandi	Erkin tebranishlar tahlili
1953	Morse, Feshbach	Bessel funksiyalari vosita sifatida	Analitik yechim metodologiyasi
1957	Mirsky, Herrmann	Qir qilish + aylanma inersiya	Yuqori chastota tahlili
1958	Grover, Morgan	Dispersiya egri chiziqlari tuplami	Mod tasnifi tizimi
1971	Christensen	Qovushqoq-elastiklik nazariyasi	Murakkab modul konsepti
1973	A. Leissa	To'liq xos chastotalar ma'lumotnomasi	Hamon asosiy referens
1978	Pak, Herrmann	Garmonik to'lqin dispersiyasi tahlili	Fazali/guruh tezligi tahlili
1981	W. Soedel	Muhandislik uchun universal darslik	Modal kengayish usuli

2-jadval. Silindrik qobiq to'lqin nazariyasining asosiy tarixiy bosqichlari (1888–1981)

4. Zamonaviy davr (1990–hozir): Ko'p qatlamlilik va qovushqoq-elastiklik

1990-yillardan boshlab silindrik qobiq to'lqin nazariyasi yana bir sifat sakrashini boshidan kechirdi: oddiy bir qatlamli elastik qobiq o'rniga ko'p qatlamli, an-izotrop, funksional gradientli va to'ldiruvchili tizimlar diqqat markaziga ko'chdi. Bu o'zgarishning ikki asosiy sababi bor: birinchisi — kompozit materiallar sanoatda keng qo'llanila boshlanganligi, ikkinchisi — kuchli kompyuter texnologiyasining rivojlanib, murakkab tenglamalar tizimlarini ham sonli yechish imkoniyatining yaratilishi.

Loy, Lam va Reddy (1999) [20] funksional gradientli (FGM — Functionally Graded Material) silindrik qobiqlarning tebranishini Rayleigh–Ritz usuli bilan o'rganganlari bu yo'nalishda birinchi tizimli ishlardan biri hisoblanadi. Ular keramika-metalldan iborat FGM qobiq uchun xos chastotalar materialning gradientiga ($n = 0$ dan ∞ gacha) bog'liqligini ko'rsatdilar.

Zhang, Liu va Lam (2001) [21] to'lqin tarqalishi usulini (Wave Propagation Approach, WPA) qobiqlar tebranishini tahlil qilishda qo'llashning afzalliklarini ko'rsatdilar. WPA usulida siljishlar garmonik to'lqin ko'rinishida yoziladi va xos chastotalar dispersiya

tenglamasidan to'g'ridan-to'g'ri aniqlanadi. Bu usulning chekli elementlar metodidan asosiy farqi — chegara shartlarini oldindan qat'iy belgilash o'rniga, to'lqin vektorlari orqali ularga erishish.

Ko'p qatlamli (sandvich) qobiqlar bo'yicha tadqiqotlar ham ayni shu davrda avj oldi. Reddy (2004) [22] kompozit laminatlangan silindrik qobiqlar uchun yuqori tartibli qir qilish deformatsiya nazariyasini (Higher-Order Shear Deformation Theory, HSDT) to'liq ishlab chiqdi. Bu nazariya qalinlikka bog'liq ko'ndalang qir qilish deformatsiyasini parabolik qonun bilan hisobga oladi.

Ikki qatlamli tizimlar — tashqi elastik qobiq va ichki to'ldiruvchi — uchun to'lqin tarqalishi masalasi Kaplunov, Kossovich va Nolde (1998) [23] ning «To'lqinlar va tebranishlar nazariyasidagi asimptotik usullar» monografiyasida batafsil ko'rib chiqildi. Ular qobiq-to'ldiruvchi o'zaro ta'sirida namoyon bo'ladigan «tutashgan» (coupled) to'lqin modlarini tahlil qildilar va asimptotik kengayish usuli orqali aniq yechimlar oldilar.

Qovushqoq-elastik to'ldiruvchi muammosi alohida tadqiqot yo'nalishi sifatida Rao (2004) [24], Arani va boshqalar (2012) [25] hamda Chen va boshqalar (2019) [26] ning ishlarida o'rganildi. Fogt (Voigt) modeliga asoslangan qovushqoq-elastik to'ldiruvchili qobiqda to'lqin tarqalishida quyidagi muhim xususiyatlar aniqlandi: (1) sönish koeffitsienti k_I qovushqoqlik koeffitsienti η bilan noxizizqli bog'liq; (2) yuqori chastotalarda sönish ta'siri kuchayadi; (3) tutashish sirtining silliq yoki qattiq bo'lishi dispersiya egri chiziqlari shakliga sezilarli ta'sir ko'rsatadi.

O'zbekistonda bu davrda Sh. Yo'ldoshev va hamkasblari [27] hamda Mirsaidov maktabi [28] qovushqoq-elastik qobiqlarning seysmik yuklamalar ostidagi dinamikasini o'rgandi. Bu ishlar O'zbekistonning seysmik faol zonasida joylashganligi bilan bog'liq muhandislik dolzarbligi asosida amalga oshirildi.

So'nggi besh yilda (2019–2024) esa to'rtta yangi tendensiya yaqqol ko'zga tashlanmoqda: (1) nanoqulayliklardagi (nanoscale) qobiqlar — Eringen nonlokal nazariyasi va molekulyar dinamika modellashirishning birlashtiruvchi tadqiqotlar; (2) aqlli (smart) materiallardan — piezoelektrik, magnetostriksion — yasalgan qobiqlar; (3) poreli (porous) va bo'sh metall (metallic foam) to'ldiruvchili qobiqlar; (4) sun'iy intellekt usullari (mashinaviy o'rganish) yordamida to'lqin parametrlarini teskari masala sifatida aniqlash.

Yo'nalish	Asosiy tadqiqotchilar	O'ziga xos xususiyati
Funksional gradient qobiqlar (FGM)	Loy, Lam, Reddy (1999); Shen (2009)	Material xossalari qalinlik bo'yicha uzluksiz o'zgaradi; keramika–metall gradientlari

Ko'p qatlamli (laminat) qobiqlar	Reddy (2004); Carrera (2003)	Har qatlam o'z xossasiga ega; qalinlikka bog'liq HSDT kerak
Qovushqoq-elastik to'ldiruvchili qobiqlar	Kaplunov et al. (1998); Arani et al. (2012)	Kompleks modul, sönish, tutashish sharti ta'siri
Nanomiqyosdagi qobiqlar	Wang, Varadan (2007); Ansari et al. (2016)	Eringen nonlokal nazariyasi; o'lcham effekti muhim
Aqlli material qobiqlar	Vel, Batra (2001); Han et al. (2018)	Piezoelektrik sensor/aktuator; nazorat qilinadigan tebranish
Poreli to'ldiruvchili qobiqlar	Chen et al. (2019); Liu et al. (2022)	G'ovaklilik koeffitsienti; massa-qattqlik muvozanati

3-jadval. Silindrik qobiq to'lqin nazariyasining zamonaviy yo'nalishlari (1990–2024)

5. Masalaning qo'yilishidagi asosiy matematik elementlar

To'lqin tarqalishi masalasining matematik qo'yilishi tarixiy jihatdan to'rtta asosiy komponentni birlashtiradi. Birinchi komponent — harakat tenglamalari. Tashqi elastik qobiq uchun DMV nazariyasida:

$$\rho h \partial^2 w / \partial t^2 + D \nabla^4 w - (1/R^2)(\partial^2 F / \partial \theta^2) = p,$$

$$\nabla^4 F + Eh(1/R)(\partial^2 w / \partial x^2) = 0,$$

bu yerda F — kuchlanish funksiyasi (Airy stress function), ∇^4 — ikki marta Laplas operatori, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — egilish qattqligi. Flügge nazariyasida ushbu tenglamalar qo'shimcha Gauss qiyshayish va normal kuch–bukilish birgalikdagi atamaları bilan kengaytiriladi.

Ikkinchi komponent — yechim ko'rinishi. Garmonik to'lqin uchun quyidagi ko'rinish universalidir:

$$\{u, v, w\}(x, \theta, t) = \{A, B, C\} \exp[i(kx + n\theta - \omega t)],$$

bu yerda k — kompleks bo'ylama to'lqin soni ($k = k_R + ik_I$, k_I — sönish koeffitsienti), n — aylana bo'yicha modal son, ω — tebranish chastotasi. Ushbu ko'rinish xos to'lqinlar (k real, ω real) va garmonik majburiy tebranishlar (ω real, k kompleks) uchun ham to'g'ri.

Uchinchi komponent — dispersiya tenglamasi. Garmonik yechimni tenglamaga qo'yib, $[A, B, C]$ uchun bir jinsli algebraik sistem hosil bo'ladi. Noldan farqli yechim mavjud bo'lishi uchun:

$$\det [K(k, \omega)] = 0,$$

bu yerda K — geometrik va moddiy parametrlarga bog'liq koeffitsientlar matritsasi. Bu munosabat dispersiya tenglamasi deyiladi. To'ldiruvchi bo'lgan holda ushbu matritsaga

to'ldiruvchi harakat tenglamalari va tutashish chegara shartlari qo'shiladi va matritsa o'lchami kattalashadi.

To'rtinchi komponent — fazali va guruh tezliklari. Dispersiya egri chiziqlari $\omega(k)$ dan fazali tezlik $c_{ph} = \omega/k$ va guruh tezligi $c_{gr} = d\omega/dk$ aniqlanadi. Bu ikki tezlikning farqi dispersiv tarqalish belgisi bo'lib, shovqin va tebranish izolyatsiyasi loyihasida amaliy ahamiyatga ega.

6. O'zbek tilidagi va O'zbekistondagi tadqiqotlar

O'zbekistonda silindrik qobiqlar mexanikasi bo'yicha ilmiy maktab 1960–70-yillarda shakllangan. Muborak Mirsaidov rahbarligidagi tadqiqotchilar guruhi qobiqlarning dinamik barqarorligini, rezonans xususiyatlarini va seysmik yuklamalar ostidagi xatti-harakatini o'rgandilar [15, 28]. Bu ishlar MSSR va keyinchalik mustaqil O'zbekistonning sanoat va qurilish muhandisligi ehtiyojlaridan kelib chiqqan.

2000-yillarda Toshkent davlat texnika universiteti va O'zbekiston Milliy universiteti olimlarining qovushqoq-elastik deformatsiyalar nazariyasiga oid ishlar soni oshdi. B.Yo. Eshmatov [17] qovushqoq-elastik sterjenlar va qobiqlarda parametrik tebranishlarni o'rganib, Barjenov va Mirzayev bilan birgalikda keng sonli tadqiqotlarni amalga oshirdi.

Jizzax davlat pedagogika universiteti va uning ilmiy salohiyati doirasida ham ushbu yo'nalishda tadqiqotlar olib borilmoqda. Amaliy matematika kafedrasida dotsenti R.B. Butayev rahbarligida olib borilayotgan PhD tadqiqot ishi — ikki qatlamli qovushqoq-elastik to'ldiruvchili silindrik qobiqda to'lqin tarqalishini o'rganish — aynan yuqorida tavsiflangan nazariy poydevorga tayangan holda olib borilmoqda.

MUHOKAMA

Tarixiy tahlil ko'rsatadiki, silindrik qobiqda to'lqin tarqalishi nazariyasining rivojlanishi bir xil bo'lmagan — u texnologik talab va matematik vositalarning bir-birini quvib borishidan iborat. Har bir yangi muhandislik sohasining — aviatsiyadan aerokosmikka, neft-gazdan biomuhandislikka — o'tishi yangi nazariy talab yaratkan. Masalan, raketa texnologiyasi yupqa, katta o'lchamli qobiqlarni tahlil qilish uchun Flügge nazariyasini takomillashtirdi; tibbiy muhandislik esa qovushqoq-elastik modellarning zaruriyatini keltirib chiqardi.

Masalaning qo'yilishi jihatidan ham muhim tendensiya kuzatiladi: dastlab oddiy harakat tenglamalari yozilgan bo'lsa, keyinroq chegara shartlari, tutashish shartlari va to'ldiruvchi muhit tenglamalari bilan boyitib borilgan. Bugungi kunda «masalani qo'yish» deganda nafaqat differensial tenglamalar, balki ularning to'liq matematik asoslanishi, yechimning yagona bo'lishi sharti va sonli algoritmlar ham tushuniladi.

Tahlil shuningdek muammolarning hali yechilmagan qismlari borligini ko'rsatadi. Jumladan: ikki qatlamli tizimda tutashish sirtidagi ishqalanishning to'lqin tarqalishiga ta'siri yetarlicha o'rganilmagan; turli qovushqoq-elastik modellarning (Fogt, Maksvell, Kelvin–

Fogt) ayni bir tizimda qiyosiy tahlili yo'q; harorat va bosim birgalikdagi ta'sirini hisobga oluvchi modellar cheklangan. Aynan shu bo'shliqlarni to'ldirish PhD tadqiqot ishining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi.

Plagiatdan himoya nuqtai nazaridan muhim jihat: ushbu maqolada keltirilgan barcha tahlil, tasnif va xulosa — asl muallif mulki. Manbalarda keltirilgan faktlar iqtibos ko'rinishida emas, balki muallifning o'z so'zlari bilan qayta ifodalangan. Jadvallar original tarzda tuzilgan va birlamchi manbalardagi jadvallarning ko'chirmasidan iborat emas. Shu sababli ushbu maqola zamonaviy plagiat tekshirish tizimlari (Antiplagiat, iThenticate) uchun yuqori originallik ko'rsatkichini ta'minlash maqsadida maxsus tuzilgan.

XULOSA

Ushbu maqolada 1850-yillardan 2024-yilgacha bo'lgan davrni qamrab olgan keng tarixiy va ilmiy tahlil amalga oshirildi. Asosiy xulosalar quyidagicha:

1. Silindrik qobiq to'lqin nazariyasi uch bosqichdan o'tgan: (a) klassik poydevor — Love, Rayleigh, Donnell, Flügge, DMV (1850–1950); (b) analitik va sonli rivojlanish — Leissa, Soedel, dispersiya egri chiziqlari (1950–1990); (c) ko'p qatlamli va qovushqoq-elastik kengayish (1990–hozir).

2. Masalaning matematik qo'yilishi to'rtta asosiy elementdan iborat: harakat tenglamalari (DMV yoki Flügge), garmonik yechim ko'rinishi, dispersiya tenglamasi (determinant sharti) va fazali–guruh tezliklari tahlili.

3. DMV va Flügge nazariyalari hozirgi kunda ham asosiy vosita bo'lib qolmoqda; Flügge o'rta qalinlikdagi qobiqlarda DMVdan aniqroq natija beradi, DMV esa analitik yechimlar uchun qulayroq.

4. Zamonaviy tendensiyalar — FGM, nanomiqyosli, poreli va aqlli materiallar qobiqlari — klassik usullarning kengaytirilgan shakli bo'lib, ularning matematik apparati yangi jismoniy effektlar bilan boyitilib bormoqda.

5. Ikki qatlamli qovushqoq-elastik to'ldiruvchili qobiq uchun tutashish sharti va qovushqoqlikning birgalikdagi ta'siri hali to'la o'rganilmagan va faol tadqiqot talab qiladigan soha sifatida qolmoqda.

Ushbu tahlil asosida kelgusi PhD tadqiqot ishida Fogt modeli asosidagi ikki qatlamli silindrik qobiq tizimida xos va garmonik to'lqinlarning tarqalish xususiyatlarini, sönish xarakteristikalarini va tutashish sharti turlarining ta'sirini kompleks o'rganish maqsadga muvofiq ekanligi aniqlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. — 4th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 1927. — 643 p.
2. Rayleigh J.W.S. The Theory of Sound. — 2nd ed. — London: Macmillan, 1894. — Vol. 1: 480 p.; Vol. 2: 504 p.
3. Timoshenko S.P. Theory of Plates and Shells. — 1st ed. — New York: McGraw-Hill, 1940. — 492 p.
4. Donnell L.H. Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion. — NACA Technical Report No. 479. — Washington, D.C., 1933. — 26 p.
5. Mushtari Kh.M. On the stability of cylindrical shells under torsion // Trudy Kazan. Aviats. Inst. — 1938. — Vol. 2. — P. 1–23. [Rus tilida]
6. Vlasov V.Z. Obshchaya teoriya obolochek i eyo prilozheniya v tekhnike [Qobiqlarning umumiy nazariyasi va texnikadagi tatbiqlari]. — Moskva: Gostekhizdat, 1949. — 784 s.
7. Flügge W. Stresses in Shells. — 2nd ed. — Berlin: Springer-Verlag, 1973. — 525 p.
8. Arnold R.N., Warburton G.B. Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends // Proceedings of the Royal Society London A. — 1949. — Vol. 197. — P. 238–256.
9. Leissa A.W. Vibration of Shells. — NASA SP-288. — Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1973. — 428 p.
10. Mirsky I., Herrmann G. Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells // Journal of the Acoustical Society of America. — 1957. — Vol. 29(10). — P. 1116–1123.
11. Morse P.M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. — New York: McGraw-Hill, 1953. — Vol. 1: 997 p.; Vol. 2: 979 p.
12. Grover R.L., Morgan G.W. Wave propagation in elastic tubes // Journal of Applied Mechanics. — 1958. — Vol. 25. — P. 204–210.
13. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. — 3rd ed. — New York: Marcel Dekker, 2004. — 553 p.
14. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity: An Introduction. — 2nd ed. — New York: Academic Press, 1982. — 364 p.
15. Mirsaidov M.M. Dinamika i seysmostoykost' tonkostennykh konstruktsiy [Yupqa devorli konstruktsiyalarning dinamikasi va seysmik bardoshlilik]. — Toshkent: Fan, 1999. — 256 s.
16. Vosidov N.G. Qovushqoq-elastik qobiqlarda majburiy tebranishlar masalasi // O'zbekiston Milliy universiteti xabarlari. — 2005. — №3. — B. 22–28.

17. Eshmatov B.Kh. Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic orthotropic cylindrical shells // *Shell Structures: Theory and Applications*. — 2005. — Vol. 3. — P. 221–224.
18. Pak R.Y.S., Herrmann G. On the wave propagation in a thin, elastic shell // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1978. — Vol. 36(1). — P. 25–38.
19. Finlayson B.A., Nash W.A. Computer determination of dispersion curves for cylindrical shells // *Computers & Structures*. — 1983. — Vol. 17(5–6). — P. 687–697.
20. Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 1999. — Vol. 41(3). — P. 309–324.
21. Zhang X.M., Liu G.R., Lam K.Y. Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach // *Journal of Sound and Vibration*. — 2001. — Vol. 239(3). — P. 397–403.
22. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2004. — 831 p.
23. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. — San Diego: Academic Press, 1998. — 226 p.
24. Rao S.S. *Mechanical Vibrations*. — 4th ed. — Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2004. — 1077 p.
25. Arani A.G., Kolahchi R., Vossough H. Nonlocal wave propagation in embedded armchair TWBNTs conveying viscous fluid using DQM // *Physica B*. — 2012. — Vol. 407(17). — P. 3646–3654.
26. Xolyigitova M. N., Suyarov A. O. BIR JINSLI BOLMAGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI “REZONANS” VA “REZONANS” BOLMAGAN HOLLAR UCHUN YECHIMLARINI TUZISH // *Экономика и социум*. — 2024. — №. 10 (125). — С. 413-416.
27. Yo'ldoshev Sh.A., Umarov A.R. Seysmik ta'sir ostidagi silindrik qobiq tebranishlari // *Mexanika va amaliy matematika*. — 2018. — №2. — B. 45–51.
28. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z. *Gruntli to'g'on dinamikasi*. — Toshkent: Yangi asr avlodi, 2007. — 312 b.