

OQIM OPERATORLARI VA ULARNING XOSSALARI

Sodiqova Vazira Yaxyoqul qizi

*O‘zbekiston Milliy universiteti Jizzax filiali, Amaliy matematika
yo‘nalishi magistranti*

Funksional analiz va dinamik sistemalar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri operatorlar oilasi — xususan, oqim operatorlari (flow operatorlari) hisoblanadi. Oqim operatorlari matematik fizika, differensial tenglamalar nazariyasi, ergodik nazariya hamda boshqaruv nazariyasida keng qo‘llaniladi, chunki ular vaqt bo‘yicha evolyutsiyalanuvchi jarayonlarni (masalan, issiqlik tarqalishi, mexanik sistemalarning harakati, statistik jarayonlar) matematik jihatdan tavsiflash imkonini beradi.

1. Oqim operatorining ta’rifi

Faraz qilaylik, X — Banach fazosi bo‘lsin. X fazosida aniqlangan chiziqli va uzluksiz operatorlarning $\{U(t)\}$, $t \geq 0$, bir parametrlil oilasi oqim operatorlari (yoki bir parametrlil yarim guruh) deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

- 1) $U(0) = I$ (birlik operator);
- 2) $U(t + s) = U(t)U(s)$, barcha $t, s \geq 0$ uchun (yarim guruh xossasi);
- 3) $\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)x = x$, har qanday $x \in X$ uchun (kuchli uzluksizlik).

Agar t parametri barcha haqiqiy sonlar to‘plamida (ya’ni $t \in \mathbb{R}$) o‘zgarsa va $U(t)$ operatorlari teskarilantuvchi bo‘lsa, bunday oila oqim (flow) yoki bir parametrlil guruh deb ataladi, bunda qo‘shimcha ravishda $U(-t) = U(t)^{-1}$ tengligi o‘rinli bo‘ladi.

2. Oqim operatorlarining asosiy xossalari

1) Chegaralanganlik. Kuchli uzluksiz yarim guruh uchun shunday $M \geq 1$ va $\omega \in \mathbb{R}$ sonlari mavjudki, barcha $t \geq 0$ uchun $\|U(t)\| \leq M \cdot e^{\omega t}$ tengsizligi o‘rinli bo‘ladi. Xususan, agar $\omega < 0$ bo‘lsa, oqim operatorlari eksponensial kamayuvchi (asimptotik barqaror) bo‘ladi.

2) Infinitesimal generator. $\{U(t)\}$ oqim operatorlari oilasiga $Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} [U(t)x - x] / t$ formulasi bilan aniqlantuvchi A chiziqli operator (ba’zan yopiq va zich aniqlangan) mos qo‘yiladi — u generator deb ataladi. Bu holda $U(t)$ operatori rasmiy ravishda $U(t) = e^{tA}$ ko‘rinishida ifodalanadi va A operatori orqali $dU/dt = AU(t)$, $U(0) = I$ Koshi masalasining yechimi sifatida qaraladi.

3) Yarim guruh xossasi (kompozitsion qonun). Ixtiyoriy $t, s \geq 0$ uchun $U(t+s) = U(t) \circ U(s) = U(s) \circ U(t)$ tengligi bajariladi, ya’ni operatorlar o‘zaro kommutativ bo‘ladi. Bu xossa jarayonning “xotirasizligi”ni, ya’ni holatning kelajakdagi evolyutsiyasi faqat joriy holatga bog‘liqligini ifodalaydi (Markov xossasiga o‘xshash).

4) Uzlüksizlik. Har bir $t \geq 0$ uchun $U(t)$ operatori X da chiziqli va uzluksiz (chegaralangan) bo‘lib, $t \rightarrow U(t)x$ akslantirish $[0, \infty)$ da uzluksiz funksiyani hosil qiladi (kuchli uzluksizlik topologiyasida).

5) Spektral xossalar. Oqim operatorining spektri generator A ning spektri bilan spektral akslantirish teoremasi orqali bog‘lanadi: agar $\lambda \in \sigma(A)$ bo‘lsa, u holda $e^{\lambda t} \in \sigma(U(t))$ bo‘ladi. Bu bog‘lanish sistemaning barqarorligini generator spektri orqali tahlil qilish imkonini beradi.

6) Qaytuvchanlik (invertirlanuvchanlik). Bir parametrli guruh holida ($t \in \mathbb{R}$) har bir $U(t)$ operatori teskarilantiruvchi bo‘lib, teskari operator $U(-t)$ bilan mos keladi. Bu xossa fizik jarayonlarning vaqt bo‘yicha qaytuvchan (reversible) ekanligini ifodalaydi, masalan Gamilton dinamikasidagi fazoviy oqimlar shu turga kiradi.

Oqim operatorlari nazariyasi funksional analiz va differensial tenglamalar nazariyasini bog‘lovchi muhim vosita bo‘lib, u orqali dinamik sistemalarning vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini, barqarorligini va asimptotik xususiyatlarini chuqur tahlil qilish mumkin. Yarim guruh nazariyasi (Hille–Yosida teoremasi asosida) oqim operatorlari va ularning generatorlari o‘rtasidagi bog‘lanishni aniq matematik shaklda ifodalab, amaliy masalalarni — xususan, qisman differensial tenglamalarning korrekt qo‘yilganligini — o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — Springer-Verlag, 1983.
2. Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — Springer, 2000.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.