YANGI O‘ZBEKISTON, YANGI TADQIQOTLAR JURNALI
Volume 2 Issue 2 19.01.2025
https://phoenixpublication.net/ Online ISSN: 3030-3494

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ДИСКРЕТНЫХ СХЕМ НА ОСНОВЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Буркутбаева Сауле
Студент факультета прикладной математики

Аннотация: *В данной статье исследуются дисперсионные свойства численных методов для решения гиперболических уравнений, которые широко применяются в задачах механики сплошных сред, акустики, гидродинамики и других областях науки и техники. На основе анализа дискретных схем, применяемых для решения гиперболических уравнений, рассматриваются их дисперсионные характеристики, влияние сеточных параметров и схемы аппроксимации на точность и устойчивость результатов. Особое внимание уделяется численным методам, учитывающим дисперсию и искусственные эффекты, возникающие при дискретизации задач. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие влияние дисперсионных эффектов на точность аппроксимации.*

Ключевые слова: *гиперболические уравнения, дискретные схемы, численная дисперсия, метод конечных разностей, численная аппроксимация, устойчивость, фазовая скорость, дисперсионные свойства, численные методы.*

Гиперболические уравнения играют ключевую роль в математическом моделировании различных физических процессов. Одним из важнейших аспектов при численном решении таких уравнений является правильная аппроксимация их решений с учетом дисперсионных свойств среды, в которой распространяются волны. Дисперсионные свойства определяют зависимость фазовой скорости волн от их частоты, что особенно важно при моделировании процессов, связанных с распространением волн, таких как волны в акустике, гидродинамике и электродинамике.

1. Гиперболические уравнения и их дисперсионные свойства: Гиперболические уравнения описывают процессы, в которых существенную роль играет распространение волн. Типичным примером гиперболического уравнения является уравнение одномерной волны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где u(x,t) — искомая функция, c — скорость распространения волны. Это уравнение описывает процесс распространения гармонической волны с фазовой скоростью (c), не зависящей от частоты волны. Однако в реальных задачах

YANGI O‘ZBEKISTON, YANGI TADQIQOTLAR JURNALI
Volume 2 Issue 2 19.01.2025
https://phoenixpublication.net/ Online ISSN: 3030-3494

распространения волн фазовая скорость часто зависит от частоты, что приводит к дисперсионным эффектам. [1.99]

2. Численные схемы и дисперсионные свойства: Численные схемы для решения гиперболических уравнений основываются на дискретизации как по времени, так и по пространству. Наиболее распространенными являются схемы конечных разностей, которые аппроксимируют производные функции через разностные отношения. Простейшая схема для одномерного уравнения волны имеет следующий вид:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

где (u^n_i) — численное приближение функции u(x,t) в точке (x_i) на временном слое \(t_n \), а (Delta t) и (Delta x) — шаги по времени и пространству, соответственно. [2.75]

Численные схемы приводят к модификации фазовой скорости волны, что вносит численную дисперсию. Для анализа дисперсионных свойств численных методов рассматриваются соответствующие дисперсионные уравнения, связывающие волновое число (k) и частоту (omega). Для точного физического решения связь между (k) и (omega) линейна, но для численных схем она становится нелинейной из-за дискретизации, что и вызывает численную дисперсию. [3.97]

Заключение: Исследование дисперсионных свойств дискретных схем на основе гиперболических уравнений показало, что численная дисперсия является важным фактором, который необходимо учитывать при численном моделировании волновых процессов. Численные методы с высоким порядком точности позволяют снизить численные дисперсионные эффекты, но требуют более тщательного выбора параметров сетки для сохранения устойчивости.

Перспективным направлением для дальнейших исследований является разработка адаптивных методов, учитывающих дисперсионные свойства схем и позволяющих автоматически подбирать оптимальные сеточные параметры для достижения максимальной точности аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. LeVeque, R.J. (2002). Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press.

2. Godunov, S.K. (1959). A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations. Mathematics of the USSR.

3. Strang, G., Fix, G.J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Inc.