

GEOGEBRA DASTURI YORDAMIDA FUNKSIYANING EKSTREMUM NUQTALARINI ANIQLASH VA GRAFIK TAHLIL QILISH USULLAR

Abdiraximova D.B

Oriental universiteti Samarqand kampusi o‘qituvchisi.

Email: abdiraximova89@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu ilmiy maqolada GeoGebra dasturi yordamida funksiyalarning ekstremum nuqtalarini aniqlash, ularni grafik asosida tahlil qilish hamda oliy matematika fanini o‘qitish jarayonida samarali qo‘llashning nazariy va amaliy jihatlari yoritilgan. Tadqiqot davomida funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalarini hosila, ikkinchi hosila hamda grafik usullar orqali aniqlash algoritmlari tizimli ravishda bayon etilgan. Shuningdek, matematik analiz fanida uchraydigan murakkab funksiyalarni vizuallashtirish orqali talabalarning mantiqiy fikrlashi, fazoviy tasavvuri va analitik yondashuvini rivojlantirish imkoniyatlari ko‘rsatib berilgan.*

Maqolada GeoGebra dasturining interaktiv muhiti asosida funksiyaning o‘shish va kamayish oraliqlari, kritik nuqtalari, egilish xossalari hamda ekstremum qiymatlarini tezkor aniqlash usullari misollar yordamida tahlil qilingan. Bundan tashqari, raqamli ta’lim texnologiyalaridan foydalanish orqali dars samaradorligini oshirish, talabalarning mustaqil ishlash ko‘nikmalarini shakllantirish va amaliy masalalarni yechish kompetensiyalarini rivojlantirish masalalari ham ko‘rib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: *GeoGebra, ekstremum nuqta, lokal maksimum, lokal minimum, funksiya, hosila, ikkinchi hosila, kritik nuqta, grafik tahlil, matematik analiz, optimallashtirish, interaktiv ta’lim, raqamli texnologiyalar, oliy matematika, pedagogik texnologiya, vizuallashtirish, matematik modellashtirish, ta’lim samaradorligi.*

Kirish

Bugungi globalashuv va raqamli transformatsiya sharoitida ta’lim tizimini modernizatsiya qilish, fanlarni innovatsion texnologiyalar asosida o‘qitish hamda talabalar bilim sifatini oshirish muhim vazifalardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, oliy ta’lim muassasalarida o‘qitiladigan matematika fanlari nazariy jihatdan murakkabligi, abstrakt tushunchalarga boyligi va yuqori darajadagi mantiqiy tafakkurni talab qilishi bilan ajralib turadi. Shu sababli matematik tushunchalarni an’anaviy usullarda o‘qitish bilan bir qatorda, zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalaridan foydalanish dolzarb masala bo‘lib qolmoqda.

Oliy matematikaning asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lgan matematik analiz fanida funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlash mavzusi alohida ahamiyat kasb etadi. Chunki

ekstremum masalalari nafaqat nazariy jihatdan, balki iqtisodiyot, texnika, fizika, mexanika, qurilish, statistika va boshqa ko‘plab sohalarda amaliy tatbiq etiladi. Masalan, ishlab chiqarish xarajatlarini minimallashtirish, foydani maksimallashtirish, optimal tezlik yoki optimal hajmni aniqlash kabi ko‘plab amaliy masalalar aynan ekstremum nazariyasiga asoslanadi. Shu bois talabalar ushbu mavzuni chuqur o‘zlashtirishi zarur hisoblanadi.

Biroq amaliy kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, talabalar funksiyaning maksimum va minimum nuqtalarini topishda hosila, kritik nuqta, o‘shish va kamayish oralig‘i, ikkinchi hosila alomati kabi tushunchalarni o‘zaro bog‘liq holda tushunishda ma‘lum qiyinchiliklarga duch keladilar. Ayniqsa, grafik tasavvurning yetarli darajada shakllanmaganligi ekstremum mavzusini o‘zlashtirish samaradorligini pasaytiradi. Natijada ko‘plab talabalar faqat formulalarni yodlash bilan cheklanib, mazmun-mohiyatni to‘liq anglay olmaydilar.

Shu nuqtai nazardan, GeoGebra dasturi matematik tushunchalarni vizual, interaktiv va amaliy asosda o‘rganish imkonini beruvchi samarali vosita sifatida alohida e‘tiborga loyiqdir. Mazkur dastur algebra, geometriya, analiz va statistika elementlarini yagona muhitda birlashtirib, foydalanuvchiga funksiyalar grafigini qurish, hosilani topish, ekstremum nuqtalarni aniqlash, parametrlarni o‘zgartirish hamda natijalarni real vaqt rejimida kuzatish imkonini beradi. Bu esa talabaning nazariy bilimlarini grafik tahlil bilan uyg‘unlashtirishga xizmat qiladi.

GeoGebra dasturidan foydalanish natijasida talabalar funksiyaning grafigini mustaqil quradi, hosila nolga teng bo‘ladigan nuqtalarni aniqlaydi, grafikning o‘shish va kamayish oralig‘ini kuzatadi hamda maksimum va minimum nuqtalarning geometrik mazmunini anglaydi. Bunday yondashuv nafaqat bilimni mustahkamlaydi, balki mustaqil fikrlash, tadqiqot olib borish va raqamli kompetensiyalarni ham rivojlantiradi.

Mazkur maqolada funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlashning nazariy asoslari, GeoGebra dasturida ularni grafik tahlil qilish usullari, amaliy misollar hamda oliy ta‘lim tizimida qo‘llash bo‘yicha metodik tavsiyalar yoritiladi. Tadqiqot natijalari matematik analiz fanini zamonaviy pedagogik texnologiyalar asosida o‘qitishda ushbu dasturdan foydalanish samarali ekanligini ko‘rsatadi.

Ekstremum tushunchasining nazariy asoslari

Agar x_0 nuqta atrofida $f(x_0) \geq f(x)$ bo‘lsa lokal maksimum,

$f(x_0) \leq f(x)$ bo‘lsa lokal minimum deyiladi. Zarur shart sifatida differensiallanuvchi funksiyada $f'(x_0) = 0$ bo‘lishi mumkin. Yetarli shart sifatida ikkinchi hosila usuli qo‘llanadi: $f''(x_0) > 0$ bo‘lsa minimum, $f''(x_0) < 0$ bo‘lsa maksimum.

Ekstremumni topish algoritmi:

$f'(x)$ hosilani topish.

$f'(x_0) = 0$ tenglamani yechish.

Kritik nuqtalarni aniqlash.

Ikkinchi hosila orqali tekshirish.

Grafikda tasdiqlash.

GeoGebra imkoniyatlari

- Funksiya grafigini qurish
- Hosila funksiyasini avtomatik topish
- Tangens chizig‘ini qurish
- Ekstremum nuqtalarni aniqlash
- Parametrlı modellarnı o‘rganish
- 3D grafiklar bilan ishlash.

Metodika

Dars jarayonida avval nazariy tushuncha beriladi, so‘ng dasturda grafik quriladi. Talabalar hosila nolga teng bo‘ladigan nuqtalarni aniqlaydi, keyin grafik orqali tekshiradi. Mustaqil topshiriqlar orqali natija mustahkamlanadi.

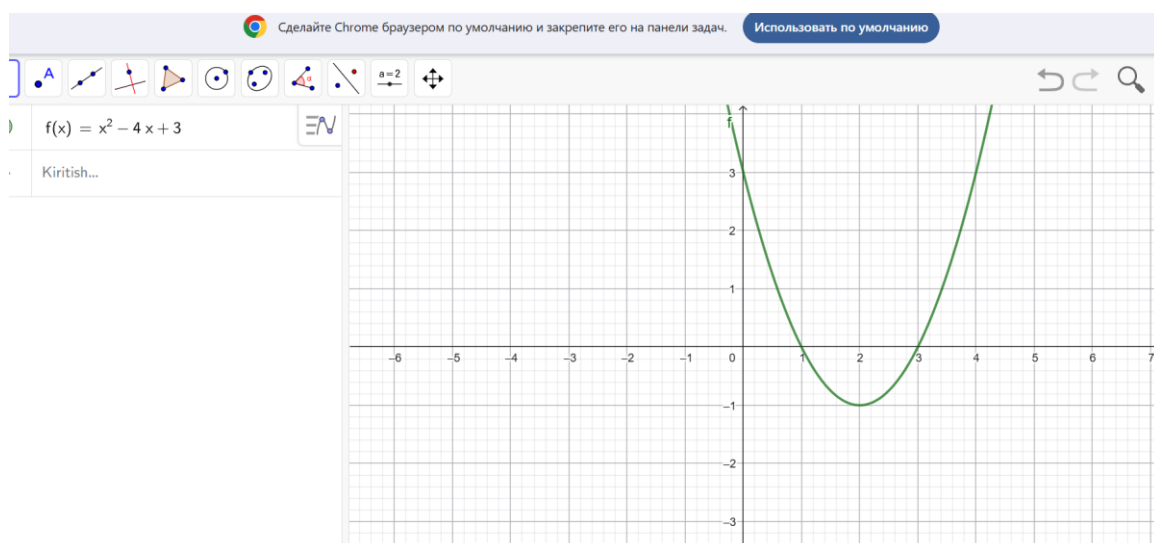
Amaliy misol 1

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini topish quyidagicha amalga oshiriladi

$f'(x) = 2x - 4 = 0$ dan. $x = 2$ $f''(x) = 2 > 0$, demak minimum. $f(2) = -1$.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug‘i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko‘rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Misolni GeoGebra dasturida ko‘rinishi quyidagicha

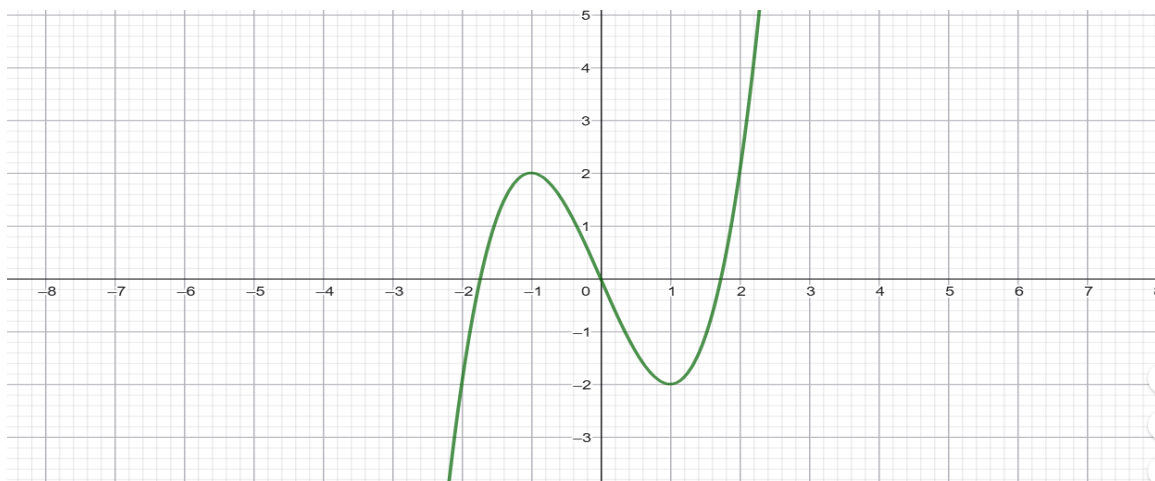


Amaliy misol 2

$f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ dan $x = \pm 1$. $f''(-1) < 0$ maksimum, $f''(1) > 0$ minimum.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug'i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko'rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Misolni GeoGebra dasturida ko'rinishi quyidagicha



Amaliy misol 3

$f(x) = x^4 - 4x^2$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini topish quyidagicha amalga oshiriladi.

Kritik nuqtalarni topish uchun funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga tenglashtiriladi.

1. Hosilani hisoblaymiz:

$$f'(x) = (x^4 - 4x^2)' = 4x^3 - 8x$$

2. Hosilani nolga tenglashtirib ,tenglamani yechamiz:

$$4x^3 - 8x = 0$$

3. Umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqaramiz:

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

4. Har bir ko'paytuvchini alohida nolga tenglab kiritik nuqtalarini topamiz.

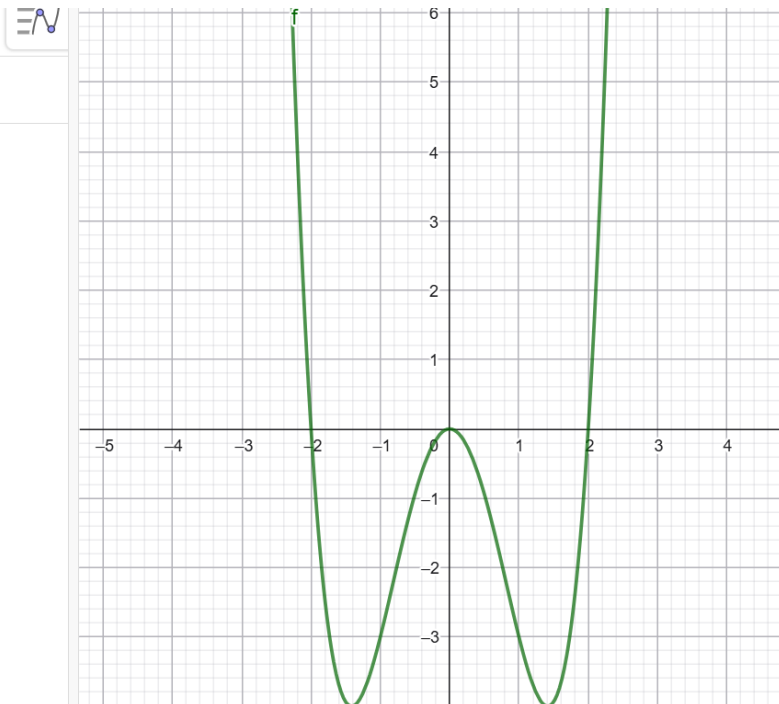
Kritik nuqtalar $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$. Grafikda uchta muhim nuqta kuzatiladi.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug'i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko'rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Misolni GeoGebra dasturida ko'rinishi quyidagicha

$$f(x) = x^4 - 4x^2$$

Kiritish...



Amaliy misol 4

$f(x) = \sin x, [0; 2\pi]$ da maksimum $\pi/2$ da, minimum $3\pi/2$ da.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug‘i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko‘rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Amaliy misol 5

$f(x) = e^x - x. f'(x) = e^x - 1 = 0$ dan $x = 0$ Minimum nuqta mavjud.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug‘i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko‘rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Amaliy misol 6

$f(x) = \ln x - x. x > 0. f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0$ dan $x = 1$ Maksimum nuqta.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug‘i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko‘rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Amaliy misol 7

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Hosila orqali lokal maksimum va minimum nuqtalar topiladi.

GeoGebra dasturida Input satriga funksiya kiritilib, Extremum() buyrug‘i orqali natija tekshiriladi. Grafik ko‘rinish talabalarga tushunchani mustahkamlaydi.

Tajriba natijalari

Tajriba guruhida GeoGebra qo‘llanganida o‘zlashtirish darajasi an’anaviy usulga nisbatan yuqori bo‘ldi. Talabalar mavzuni tezroq tushundi, mustaqil ishlash faolligi oshdi.

Ko‘rsatkich	An’anaviy	GeoGebra
O‘zlashtirish	68%	87%
Qiziqish	61%	91%
Mustaqil ish	55%	84%

Xulosa

GeoGebra dasturi ekstremum mavzusini o‘qitishda samarali, ko‘rgazmali va interaktiv vosita hisoblanadi. U nazariy bilimni amaliy faoliyat bilan bog‘laydi, talabalar motivatsiyasini oshiradi va ta’lim sifatini yaxshilaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Hohenwarter M. GeoGebra Manual.
2. Stewart J. Calculus.
3. Demidovich B.P. Matematik analiz masalalari.
4. Ayupov Sh.A. Oliy matematika kursi.
5. Zorich V.A. Mathematical Analysis.
6. Anton H. Calculus.