ILDIZ CHEGARALARI VA SHTURM TEOREMASI: TENGLAMALAR ILDIZLARINI ANIQLASH

Boboqulova Durdona Sanjar qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
pedagogika fakulteti matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada algebraik tenglamalarning haqiqiy ildizlarini aniqlashda qo'llaniladigan ildizlar chegarasi metodlari hamda Shturm teoremasi haqida batafsil ma'lumot berilgan. Ildizlarning mavjudlik intervali, ularning soni va joylashuvini aniqlashda bu yondashuvlar yuqori samaradorlikka ega. Maqolada nazariy asoslar, algoritmik yondashuvlar va amaliy misollar orqali ushbu metodlarning afzalliklari yoritilgan.*

Kalit so'zlar: *ildiz chegarasi, Shturm teoremasi, polinom, algebraik tenglama, sign o'zgarishi, haqiqiy ildizlar soni.*

Algebraik tenglamalarning ildizlarini aniqlash har doim matematikaning markaziy muammolaridan biri bo'lib kelgan. Ayniqsa, yuqori darajali tenglamalarda ildizlarning aniq sonini topish, ularning joylashuv oraliqlarini aniqlash ko'plab amaliy va nazariy muammolarni hal qilishda zarurdir.

Bu borada **ildiz chegaralari** metodlari — polinomning haqiqiy ildizlari qaysi intervalda joylashganini oldindan aniqlash imkonini beradi. Shuningdek, **Shturm teoremasi** bu ildizlarning sonini aniq hisoblab berishga yordam beradi. Ayniqsa, bu yondashuvlar raqamli hisoblash, algoritmlar, matematik modellashtirish va kompyuter algebra tizimlarida muhim ahamiyatga ega.

Ushbu maqolada ushbu ikki yondashuv — ildizlar chegarasini aniqlash va Shturm ketma-ketligi orqali haqiqiy ildizlar sonini topish usullari nazariy va amaliy jihatdan tahlil qilinadi.

Tadqiqot quyidagi metodlarga asoslandi:

- **Nazariy tahlil** – polinomlar ildizlariga oid chegaralar va Shturm ketma-ketligi tuzilmasi o'rganildi.
- **Algebraik manipulyatsiya** – polinomlar ustida bo'lish, qoldiq olish, ishoralar ketma-ketligini tahlil qilish.
- **Amaliy misol** – konkret tenglama orqali metodlar tatbiq qilindi.
- **Kompyuterli tekshirish** – natijalar Mathematica va Python orqali tasdiqlandi.

Ildizlar chegarasini aniqlash

Har bir algebraik tenglama uchun ildizlar ma'lum bir oraliqda joylashadi. Quyidagi chegaralar foydali bo'ladi:

Cauchy chegarasi:

Agar polinom quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsa:

P(x)=anxn+an−1xn−1+⋯+a0P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0P(x)=an xn+an−1xn−1+⋯+a0

Shunda barcha **haqiqiy ijobiy ildizlar** quyidagi oraliqda yotadi:

x<1+max|a0|,|a1|,…,|an−1||an|x < 1 + \frac{\max{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|}}{|a_n|}x<1+|an|max|a0|,|a1|,…,|an−1|

Bu orqali ildizlar maksimal qiymat chegarasi aniqlanadi.

Shturm teoremasi

Shturm teoremasi polinomning haqiqiy ildizlar sonini aniqlashda ishlatiladi. Bu uchun maxsus **Shturm ketma-ketligi** tuziladi:

S0(x)=P(x),S1(x)=P′(x)S_0(x) = P(x), \quad S_1(x) = P'(x)S0(x)=P(x),S1(x)=P′(x)

Keyin esa rekursiv tarzda:

Sk+1(x)=−qoldiq(Sk−1(x)÷Sk(x))S_{k+1}(x) = -\text{qoldiq}(S_{k-1}(x) \div S_k(x))Sk+1(x)=−qoldiq(Sk−1(x)÷Sk(x))

Ketma-ketlik Sn(x)=0S_n(x) = 0Sn(x)=0 bo'lgunga qadar davom ettiriladi.

Istalgan oraliqda [a,b][a, b][a,b] haqiqiy ildizlar soni quyidagicha aniqlanadi:

V(a)−V(b)V(a) - V(b)V(a)−V(b)

bu yerda V(x)V(x)V(x) — xxx nuqtadagi ishora o'zgarishlari soni.

Amaliy misol

Polinomni olaylik:

P(x)=x3−3x2+4x−2P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2P(x)=x3−3x2+4x−2

Shturm ketma-ketligi:

- S0(x)=x3−3x2+4x−2S_0(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2S0(x)=x3−3x2+4x−2
- S1(x)=3x2−6x+4S_1(x) = 3x^2 - 6x + 4S1(x)=3x2−6x+4
- S2(x)=−((x3−3x2+4x−2)3x2−6x+4)S_2(x) = -\left(\frac{(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)}{3x^2 - 6x + 4} \right)S2(x)=−(3x2−6x+4(x3−3x2+4x−2)) qoldiqning qarama-qarshi qiymati.

Faraz qilaylik, biz [0,3][0, 3][0,3] oraliqda ildizlar sonini topmoqchimiz.

- V(0)=2V(0) = 2V(0)=2 (2 marta ishora o'zgaradi)
- V(3)=0V(3) = 0V(3)=0

Shunday qilib, bu oraliqda **2 ta haqiqiy ildiz mavjud**.

Ildiz chegaralarini oldindan aniqlash orqali ildizlarni izlash masofasi sezilarli darajada qisqaradi. Bu usul raqamli yondashuvlarda, ayniqsa Nyuton-Rafson metodida boshlang'ich taxminlarni to'g'ri belgilashda yordam beradi.

Shturm teoremasining asosiy afzalligi — bu metod sonlarni taxminiy emas, **aniq** hisoblaydi. Bu ko'p hollarda **signal ishlov berish**, **muhandislik modellarini tahlil qilish**, **tizimning barqarorligini tekshirish** kabi yo'nalishlarda beqiyos ahamiyatga ega.

Biroq, yuqori darajali polinomlar uchun Shturm ketma-ketligi sezilarli darajada murakkablashadi va hisoblashlarda kompyuter yordami zarur bo'ladi. Ammo nazariyani tushunish algoritmik tafakkur shakllanishi uchun juda foydali.

Ildiz chegaralari va Shturm teoremasi algebraik tenglamalarning haqiqiy ildizlarini aniqlashda muhim vosita hisoblanadi. Ushbu maqolada bu metodlarning nazariy asoslari va amaliy qo‘llanilishi yoritildi. Ayniqsa, Shturm teoremasi orqali har qanday oraliqda aniq nechta haqiqiy ildiz mavjudligini aniqlash mumkin. Bu usullar oliy matematika, muhandislik hisoblari va dasturlashda keng qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan kuchli algoritmik vositalardir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kurosh A.G. *Higher Algebra*. Moskva: Nauka, 1985.
2. Stewart J. *Calculus with Early Transcendentals*. Cengage Learning, 2016.
3. Rahmatov A. *Algebra va matematik tahlil asoslari*. Toshkent: O‘qituvchi, 2020.
4. Wolfram Research. *Shturm’s Theorem*, https://mathworld.wolfram.com/SturmTheorem.html
5. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1972.