

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Автор: Атаниязова Зарина Комиловна

*Преподаватель математики общеобразовательной школы № 18, г. Навои,
Республика Узбекистан.*

E-mail: sdilshodkodiroy@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются основные математические подходы к строгому построению множества действительных чисел: аксиоматический, посредством сечений Дедекинда, посредством фундаментальных последовательностей рациональных чисел и посредством бесконечных десятичных представлений. Цель исследования состоит в выявлении логических оснований, преимуществ, ограничений и областей применения указанных подходов. Используются сравнительный, структурно-логический и математико-аналитический методы. Показано, что конструкции Дедекинда и Кантора исходят из рациональных чисел, но по-разному устраняют их неполноту: первая кодирует число разбиением множества рациональных чисел, вторая – классом эквивалентности последовательностей. Десятичное представление удобно для вычислений и интуитивного понимания, однако требует специального устранения неоднозначности записей. Аксиоматический подход наиболее компактен в дальнейшей теории, но сам по себе не описывает явную модель действительных чисел. Обосновывается, что полученные конструкции изоморфны как полные упорядоченные поля, поэтому различия между ними относятся прежде всего к способу обоснования, а не к математическим свойствам результата.

Ключевые слова: *действительные числа, полнота, сечение Дедекинда, последовательность Коши, эквивалентность, десятичное представление, упорядоченное поле, математический анализ.*

Введение

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является фундаментальной основой математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, математического моделирования и численных методов. Предел функции, непрерывность, существование экстремума, сходимость последовательностей и многие другие понятия опираются на свойства действительных чисел, которые не выполняются в полном объеме для рациональных

чисел $\mathbb{Q}$. Поэтому строгое обоснование структуры $\mathbb{R}$ представляет не только исторический интерес, но и методологическую необходимость.

Рациональные числа плотны на числовой прямой: между любыми двумя различными рациональными числами находится ещё одно рациональное число. Однако плотность не означает полноту. Например, множество рациональных чисел q , удовлетворяющих условию $q^2 < 2$ и $q \geq 0$, непусто и ограничено сверху в $\mathbb{Q}$, но не имеет точной верхней грани, принадлежащей $\mathbb{Q}$. Аналогичная проблема возникает при рассмотрении $\sqrt{2}$, π и пределов многих рациональных последовательностей. Следовательно, требуется расширить числовую систему так, чтобы устранить «пробелы», сохранив арифметические и порядковые свойства рациональных чисел.

В математике сформировалось несколько способов обоснования действительных чисел. Наиболее известны сечения Дедекинда и классы эквивалентных фундаментальных последовательностей, связанные с работами Р. Дедекинда и Г. Кантора в XIX веке. Наряду с ними применяются аксиоматическое описание $\mathbb{R}$ как полного упорядоченного поля и построение через бесконечные десятичные дроби. Эти подходы различаются исходными объектами, техническими процедурами и педагогической наглядностью, но приводят к одной и той же структуре действительных чисел [1; 2].

Цель статьи – провести сравнительный анализ указанных методов, установить их концептуальные различия и показать, в каких задачах каждый из них оказывается наиболее удобным. Для достижения цели решаются следующие задачи: раскрыть математическую идею каждого построения; обозначить условия корректности определения операций и порядка; сопоставить способы обеспечения полноты; сформулировать вывод о взаимосвязи построенных систем.

1. Проблема полноты рациональных чисел

Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ обладает операциями сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевой элемент, а также линейным порядком, согласованным с арифметикой. Кроме того, $\mathbb{Q}$ является плотным множеством: если $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a < b$, то число $(a+b)/2$ также рационально и лежит между ними. Но в $\mathbb{Q}$ не всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Рассмотрим множество $A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0, q^2 < 2\}$. Оно непусто и ограничено сверху, например числом 2. Если бы у A существовала рациональная точная верхняя грань r , то естественно ожидать $r^2 = 2$. Однако рационального числа с квадратом 2 не существует. Это противоречие иллюстрирует отсутствие в $\mathbb{Q}$ предела, который должен соответствовать геометрической диагонали единичного квадрата. При переходе к $\mathbb{R}$ данное препятствие устраняется введением нового элемента $\sqrt{2}$.

Полнота действительных чисел обычно выражается через свойство точной верхней грани: всякое непустое подмножество $\mathbb{R}$, ограниченное сверху, имеет супремум в $\mathbb{R}$. Эквивалентные формулировки включают сходимость каждой фундаментальной

последовательности, теореме о вложенных отрезках и свойство непрерывности числовой прямой. Важно различать плотность и полноту: плотность описывает наличие промежуточных элементов, а полнота гарантирует отсутствие «пробелов» в системе.

Любое строгое построение $\mathbb{R}$ должно не просто добавить отдельные иррациональные числа, а определить целостную систему, в которой согласованы арифметика, порядок и полнота. Иначе остаётся неясным, как складывать новые элементы, сравнивать их между собой и доказывать фундаментальные теоремы анализа.

2. Построение действительных чисел с помощью сечений Дедекинда

Метод сечений был систематически изложен Рихардом Дедекиндом в работе «Непрерывность и иррациональные числа» (1872). Основная идея состоит в том, чтобы представить действительное число через разбиение множества рациональных чисел на две части, соответствующие числам, расположенным левее и правее условной точки на прямой [1; 3].

В распространённой формулировке сечение Дедекинда задаётся непустым подмножеством $A \subset \mathbb{Q}$, которое не совпадает со всем $\mathbb{Q}$, замкнуто вниз и не имеет наибольшего элемента. Условие замкнутости вниз означает: если $x \in A$ и $y \in \mathbb{Q}$, $y < x$, то $y \in A$. Отсутствие наибольшего элемента означает, что для любого $x \in A$ существует $y \in A$, для которого $x < y$. Вторая часть разбиения – множество рациональных чисел, не принадлежащих A .

Каждому рациональному числу r соответствует сечение $A_r = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$. Однако существуют сечения, не соответствующие никакому рациональному числу. Например, множество $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ или } (q \geq 0 \text{ и } q^2 < 2)\}$ задаёт сечение, соответствующее $\sqrt{2}$. Оно включает все отрицательные рациональные числа и неотрицательные рациональные числа, квадрат которых меньше 2. Внутри $\mathbb{Q}$ граница этого множества не представлена, но само сечение определено строго.

Порядок на множестве сечений задаётся включением: $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$. Рациональное число отождествляется с соответствующим ему сечением. Сложение сечений можно определить через суммы элементов, а умножение первоначально задаётся для неотрицательных сечений, после чего распространяется на остальные случаи с учётом знаков. Техническая сторона умножения существенно сложнее определения порядка, что составляет одно из ограничений данного метода [2; 4].

Ключевое преимущество подхода Дедекинда состоит в том, что полнота встроена в саму конструкцию. Если задано непустое семейство сечений, ограниченное сверху, то его точная верхняя грань может быть представлена объединением соответствующих нижних классов. Таким образом, существование супремума обосновывается непосредственно через свойства множеств рациональных чисел.

Метод сечений имеет ясный логический смысл: число определяется не приближением к нему, а местом, которое оно занимает в упорядоченном множестве $\mathbb{Q}$. Благодаря этому подход особенно удобен при изучении непрерывности, теории порядка и доказательстве теорем о точной верхней грани. Вместе с тем работа с множествами рациональных чисел требует развитого понимания теории множеств, а арифметические операции оказываются более громоздкими, чем при последовательностном подходе.

3. Построение через фундаментальные последовательности Коши

Другой распространённый способ состоит в построении действительных чисел как классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Он связан с идеями Георга Кантора и общей процедурой пополнения метрических пространств. Здесь новое число задаётся не разделением $\mathbb{Q}$, а рациональными приближениями, которые становятся сколь угодно близкими друг к другу [2; 5].

Последовательность (a_n) рациональных чисел называется последовательностью Коши, если для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n, m \geq N$ выполняется $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Это условие означает, что члены последовательности со временем сближаются между собой. В отличие от определения сходимости, в нём не требуется заранее указывать предел.

Пусть C – множество всех последовательностей Коши, состоящих из рациональных чисел. Две последовательности (a_n) и (b_n) объявляются эквивалентными, если $a_n - b_n$ стремится к нулю, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого номера выполняется $|a_n - b_n| < \varepsilon$. Действительное число определяется как класс эквивалентности таких последовательностей. Символически $\mathbb{R}$ можно представить как фактор-множество $C/\sim$, где $\sim$ – отношение эквивалентности.

Например, рациональные последовательности, полученные последовательным приближением к $\sqrt{2}$ сверху и снизу, если они являются последовательностями Коши, задают один и тот же действительный элемент при условии, что разность соответствующих членов стремится к нулю. При этом конкретная последовательность не является самим числом: одному действительному числу соответствует целый класс эквивалентных последовательностей.

Операции определяются покомпонентно: класс суммы соответствует последовательности $(a_n + b_n)$, а класс произведения – последовательности $(a_n b_n)$. Чтобы эти определения были корректными, необходимо доказать, что сумма и произведение последовательностей Коши снова являются последовательностями Коши, а результат не зависит от выбора представителей эквивалентных классов. Аналогичным образом задаётся отношение порядка, причём его формулировка требует аккуратного обращения с последовательностями, которые могут иметь близкие члены.

Основное достоинство метода – естественная связь с пределами и приближениями. Он не только строит $\mathbb{R}$, но и демонстрирует механизм, с помощью которого рациональные приближения формируют предел, отсутствующий в исходном поле. Подход удобен для анализа, метрических пространств и численных методов, где последовательности и оценки погрешности играют центральную роль. В частности, идея пополнения переносится на произвольные метрические пространства.

Недостаток заключается в технической сложности проверки корректности операций и эквивалентности. Необходимо работать одновременно с бесконечными последовательностями, оценками и классами эквивалентности. Кроме того, доказательство полноты требует отдельного аргумента. В учебном изложении этот метод обычно наиболее понятен после освоения пределов и фундаментальных последовательностей.

4. Построение через бесконечные десятичные представления

В практической математике действительные числа часто представляются бесконечными десятичными дробями вида $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$, где a_0 – целая часть, а a_n – цифры после запятой. Такая запись позволяет интуитивно описывать иррациональные числа и систематически приближать их рациональными числами. Однако десятичное представление требует дополнительного обоснования, если его используют как самостоятельный метод построения $\mathbb{R}$.

Конечный фрагмент десятичной записи определяет рациональное приближение. Например, число $1,414\dots$ можно рассматривать через последовательность приближений $1,4; 1,41; 1,414; 1,4142$ и так далее. Если десятичные цифры задают вложенные интервалы, длина которых стремится к нулю, то эти интервалы определяют единственную точку в полной числовой системе. При построении $\mathbb{R}$ с нуля, однако, нельзя без доказательства ссылаться на существование этой точки: это было бы предположением того свойства, которое требуется обосновать.

Существенная тонкость состоит в неоднозначности десятичных записей. Например, $0,999\dots$ и $1,000\dots$ представляют одно и то же число. Поэтому множество всех бесконечных последовательностей цифр не может быть напрямую отождествлено с $\mathbb{R}$ без введения отношения эквивалентности или специального правила выбора канонической записи. Необходимо также определить сложение, умножение и порядок так, чтобы переносы цифр и предельные случаи не нарушали согласованность.

Преимущество десятичного подхода заключается в наглядности и непосредственной связи с вычислениями. Он особенно полезен в школьном обучении, измерениях, приближённых вычислениях и представлении результатов численных алгоритмов. Ограничение связано с тем, что десятичная запись зависит от выбранного основания и не всегда делает структурные свойства поля прозрачными. Для строгого обоснования полноты её обычно связывают с последовательностями рациональных приближений или с вложенными интервалами.

5. Аксиоматический подход: действительные числа как полное упорядоченное поле

В аксиоматическом подходе действительные числа не строятся непосредственно из рациональных чисел. Вместо этого задаётся система $\mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения, отношением порядка и набором аксиом. Требуется, чтобы $\mathbb{R}$ было упорядоченным полем и удовлетворяло аксиоме полноты: каждое непустое множество, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань.

Аксиомы поля формализуют привычные арифметические свойства: ассоциативность и коммутативность сложения и умножения, существование нулевого и единичного элементов, противоположных и обратных элементов, а также дистрибутивность. Упорядоченность означает согласованность порядка с операциями. Аксиома полноты дополняет эти условия и отличает $\mathbb{R}$ от $\mathbb{Q}$: поле рациональных чисел является упорядоченным, но не полным.

Сильная сторона аксиоматического подхода – компактность. После принятия аксиом многие теоремы математического анализа доказываются без повторного обращения к конкретному способу построения чисел. Кроме того, теорема об изоморфизме показывает, что любые два полных упорядоченных поля изоморфны: между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операции и порядок. Поэтому аксиомы определяют структуру действительных чисел с точностью до изоморфизма [4; 6].

Вместе с тем аксиоматическое описание не всегда удовлетворяет задаче явного конструирования. Оно сообщает, какими свойствами обладает $\mathbb{R}$, но не показывает само по себе, как элементы $\mathbb{R}$ получаются из $\mathbb{Q}$. По этой причине в основаниях анализа аксиоматический подход нередко дополняется одной из конструкций – сечениями Дедекинда или последовательностями Коши. В таком сочетании конструкция подтверждает существование требуемой системы, а аксиомы позволяют работать с ней экономно.

6. Сравнительный анализ методов

Рассмотренные методы различаются тем, что именно выступает представителем действительного числа. В методе Дедекинда это подмножество $\mathbb{Q}$, отделяющее рациональные числа, расположенные по разные стороны условной границы. В методе Коши – класс рациональных последовательностей, члены которых становятся сколь угодно близкими. В десятичном подходе – бесконечная последовательность цифр с правилами интерпретации и устранения неоднозначности. В аксиоматическом подходе элемент принадлежит системе, заданной аксиомами, и не получает обязательного конкретного представления.

По критерию прозрачности полноты особенно выразителен метод Дедекинда: супремум строится как объединение нижних классов. Метод Коши объясняет полноту через пополнение и сходимости фундаментальных последовательностей. Десятичный метод нагляден, но его строгость зависит от корректно сформулированных правил

интерпретации. Аксиоматический метод формулирует полноту непосредственно как свойство системы, не раскрывая механизма её построения.

По критерию определения арифметики преимущество часто принадлежит последовательностному подходу. Сложение и умножение задаются покомпонентно, после чего доказывается независимость результата от представителя класса. У сечений Дедекинда порядок определяется очень естественно, но умножение требует разбиения на случаи. Десятичная арифметика привычна для вычислений, однако переносы разрядов и неоднозначные записи усложняют её формальную основу. В аксиоматическом подходе операции принимаются как часть структуры и далее используются по правилам поля.

По критерию применения в математическом анализе методы не конкурируют в абсолютном смысле. Сечения удобны для доказательств, связанных с порядком и точными верхними гранями. Последовательности Коши органично связаны с пределами, метрическими пространствами и численными приближениями. Десятичные записи полезны для алгоритмического представления и практических вычислений. Аксиоматическое описание наиболее эффективно в изложении общей теории, когда способ построения уже несущественен.

Сравнение позволяет выделить общий принцип: полнота – не дополнительное удобство, а структурное свойство, необходимое для стандартного математического анализа. Каждый конструктивный метод кодирует её по-своему, но корректность требует доказать, что полученная система является полным упорядоченным полем. Сходство результатов не отменяет различий в логической организации доказательств.

Таблица 1. Сравнительная характеристика методов построения $\mathbb{R}$

Метод	Исходный объект	Основное преимущество	Основное ограничение
Сечения Дедекинда	Подмножества $\mathbb{Q}$	Полнота выражается через порядок и объединение сечений	Сложное определение умножения
Последовательности и Коши	Фундаментальны е последовательности в $\mathbb{Q}$	Естественная связь с пределами и пополнением	Нужно доказывать корректность классов и операций
Десятичные представления	Бесконечные последовательности цифр	Наглядность и удобство вычислений	Неоднозначность записей и зависимость от основания

Аксиоматический подход	Полное упорядоченное поле	Краткость и удобство дальнейшего анализа	Не даёт явного построения элементов из $\mathbb{Q}$
---------------------------	------------------------------	---	---

7. Эквивалентность конструкций и методологические выводы

Несмотря на различие исходных объектов, конструкции Дедекинда и Кантора приводят к изоморфным полным упорядоченным полям. В первом случае рациональные числа дополняются всеми допустимыми сечениями; во втором – классами фундаментальных последовательностей, отождествлёнными по условию стремления разности к нулю. Соответствие между конструкциями устанавливается через рациональные приближения: каждому сечению можно сопоставить последовательность рациональных чисел, приближающую определяемую им границу, а каждой последовательности Коши – сечение, описывающее её предельное положение.

Изоморфизм означает сохранение сложения, умножения, порядка и единичного элемента. Следовательно, теоремы, доказанные в одной конструкции на уровне структуры полного упорядоченного поля, переносятся в другую. После установления такого соответствия выбор конкретного построения обычно не влияет на дальнейшие результаты анализа. Однако на этапе обучения и обоснования выбор метода важен, поскольку он определяет, какие понятия вводятся первыми и какие доказательства становятся наиболее естественными.

С методологической точки зрения полезно различать три вопроса: существование действительных чисел, их структурные свойства и способы практического представления. Конструкции Дедекинда и Коши отвечают прежде всего на вопрос существования; аксиоматический подход систематизирует структурные свойства; десятичная запись обеспечивает удобную форму представления и вычисления. Смешение этих уровней может привести к логическому кругу, например если при построении $\mathbb{R}$ через десятичные дроби без доказательства использовать теорему о существовании предела в $\mathbb{R}$.

Для курса математического анализа рациональна последовательность изложения, при которой сначала раскрывается неполнота $\mathbb{Q}$, затем подробно изучается одна строгая конструкция, после чего вводится аксиоматическая характеристика $\mathbb{R}$ и обсуждается эквивалентность альтернативных моделей. Если учебная цель связана с пределами и метрическими пространствами, последовательности Коши могут быть основным методом. Если акцент сделан на порядке, непрерывности и супремуме, более естественным является подход Дедекинда.

Заключение

Проведённый анализ показывает, что построение множества действительных чисел может быть реализовано несколькими логически различными, но структурно

эквивалентными способами. Метод Дедекинда определяет число через сечение рациональных чисел и наиболее непосредственно раскрывает идею полноты как отсутствия разрывов в упорядоченной системе. Метод Коши формирует действительные числа как классы эквивалентных фундаментальных последовательностей и тесно связан с теорией пределов и пополнением метрических пространств. Десятичное представление отличается наглядностью и практической полезностью, однако требует специальных правил для устранения неоднозначности. Аксиоматический подход обеспечивает наиболее компактное описание свойств $\mathbb{R}$, но не заменяет конструктивного обоснования существования этой системы.

Главный результат сравнения заключается в том, что указанные методы не дают разных множеств действительных чисел в структурном смысле: построенные системы изоморфны как полные упорядоченные поля. Различия определяются способом кодирования элементов, удобством доказательств и областью применения. Поэтому выбор метода должен зависеть от исследовательской задачи: для обоснования полноты и порядка предпочтительны сечения; для анализа сходимости – последовательности Коши; для вычислений – десятичные представления; для дальнейшего теоретического изложения – аксиоматическая характеристика.

Перспективой дальнейшего исследования может стать более детальное сопоставление конструкций с точки зрения теории множеств, вычислимости и обучения математическому анализу, а также анализ того, как выбранная модель действительных чисел влияет на формализацию численных алгоритмов.

Примечания

1. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Первое издание работы – 1872 год. Работа рассматривает построение непрерывной числовой системы посредством сечений рациональных чисел.

2. Под фундаментальной последовательностью понимается последовательность Коши; терминология может различаться в русскоязычных учебниках.

3. В статье используется стандартная односторонняя формулировка сечения: непустое собственное подмножество $\mathbb{Q}$, замкнутое вниз и не имеющее наибольшего элемента. В литературе встречаются эквивалентные определения через пару классов.

4. Теорема об изоморфизме полных упорядоченных полей утверждает единственность структуры действительных чисел с точностью до изоморфизма, сохраняющего операции и порядок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg, 1872.
2. Enderton H. B. Elements of Set Theory. New York: Academic Press, 1977. Раздел о построении действительных чисел.

3. Boman E., Rogers R. Real Analysis. Раздел “Building the Real Numbers”. Mathematics LibreTexts.
4. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976.
5. Aitken W. Chapter 9: Constructing the Real Numbers. Учебные материалы по математическому анализу, California State University San Marcos.
6. Ehrlich P. (ed.). Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
7. González Hernández G. La construcción de los números reales. Universidad de La Laguna, 2020.
8. Crosby C. An Examination of Richard Dedekind’s “Continuity and Irrational Numbers”. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal. 2016. Vol. 17, no. 1, Article 9.