

**NOLOKAL BOSHLANG'ICH VA DIRIXLE CHEGARAVIY SHARTLI TOR
TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN MANBANI ANIQLASHNING TESKARI
MASALASI**

Yangibayev Yashnarbek

Osiyo Xalqaro Universiteti Xorazm filiali

Matematika yo'nalishi I-kurs magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada chekli oraliqda aniqlangan tor tebranish tenglamasi uchun manbani aniqlashning teskari masalasi o'rganiladi. Masalada tebranish jarayonini tavsiflovchi funksiya bo'yicha klassik boshlang'ich shart o'rniga vaqt bo'yicha nolokal shart va fazoviy o'zgaruvchi bo'yicha Dirixle chegaraviy sharti qo'yilgan. Noma'lum manba funksiyasini aniqlash uchun qo'shimcha (ortiqcha) shart kiritilgan. Furiye usuli — o'ziga xos funksiyalar bo'yicha yoyish usuli — yordamida masala har bir garmonika uchun ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi va noma'lum Furiye koeffitsientlari uchun aniq formulalar olinadi. Berilgan funksiyalarga qo'yilgan silliqlik shartlari ostida masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan, mos regulyarlik (rezonans bo'lmaslik) sharti ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: tor tebranish tenglamasi, teskari masala, manbani aniqlash, nolokal shart, Dirixle sharti, Furiye usuli, mavjudlik va yagonalik.

Abstract. This paper studies the inverse source problem for the wave equation on a finite interval, in which the classical initial condition is replaced by a nonlocal condition in the time variable, together with a Dirichlet boundary condition in the spatial variable. To determine the unknown source function, an additional overdetermination condition is introduced. Using the Fourier (eigenfunction expansion) method, the problem is reduced to a countable system of second-order ordinary differential equations for the Fourier coefficients, and explicit formulas for the unknown coefficients are obtained. Existence and uniqueness of the solution are proved under smoothness assumptions on the given data, together with the corresponding regularity (non-resonance) condition.

Keywords: wave equation, inverse problem, source identification, nonlocal condition, Dirichlet condition, Fourier method, existence and uniqueness.

1. Kirish

Matematik fizikaning ko'plab tatbiqiy masalalarida — akustika, seysmologiya, elektrodinamika va boshqa sohalarida — tebranish jarayonini vujudga keltiruvchi manba (tashqi ta'sir) funksiyasi to'g'ridan-to'g'ri o'lchanmaydi, uni jarayonning kuzatilgan natijalari (qo'shimcha ma'lumotlar) asosida tiklash zarurati tug'iladi. Bunday masalalar teskari masalalar nazariyasining muhim sinfini tashkil etadi va, qoida bo'yicha, noto'g'ri qo'yilgan

(ill-posed) masalalar sirasiga kiradi, ya'ni yechimning mavjudligi, yagonaligi va berilganlarga uzluksiz bog'liqligi maxsus tahlilni talab qiladi.

So'nggi yillarda differensial tenglamalar uchun klassik boshlang'ich shartlar o'rniga nolokal (vaqt yoki fazo bo'yicha ikkita yoki undan ortiq nuqtadagi qiymatlarni bog'lovchi) shartlarni qo'yish katta qiziqish uyg'otmoqda, chunki ko'plab real jarayonlarda tizim holati faqat boshlang'ich lahzada emas, balki jarayon davomidagi bir necha lahzalarda o'lchanadi yoki davriylik, energiya saqlanishi kabi qo'shimcha fizik talablar mavjud bo'ladi. Parabolik tenglamalar uchun nolokal masalalar (Ионкин, Самарский, Нахушев va boshqalar) yetarlicha to'liq o'rganilgan bo'lsa, giperbolik (tebranish) tenglamalari uchun nolokal shartli teskari masalalar hozirgacha faol tadqiqot mavzusi bo'lib qolmoqda.

Ushbu ishda chekli oraliqda aniqlangan bir o'lchovli tor tebranish tenglamasi uchun manbani aniqlashning teskari masalasi qaraladi: fazoviy o'zgaruvchi bo'yicha Dirixle chegaraviy sharti, vaqt o'zgaruvchisi bo'yicha esa klassik boshlang'ich shart o'rniga jarayonning boshlang'ich va oxirgi lahzalaridagi holatlarini bog'lovchi nolokal shart qo'yiladi. Noma'lum manba funksiyasi bitta qo'shimcha (ortiqcha) shart yordamida aniqlanadi. Masalani yechish uchun o'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usulidan foydalaniladi.

2. Masalaning qo'yilishi

$Q_T = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ to'rtburchak sohada quyidagi tor tebranish tenglamasini qaraymiz:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x) \cdot h(t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

bu yerda $u(x,t)$ — tebranish jarayonini tavsiflovchi noma'lum funksiya, $f(x)$ — aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum manba funksiyasi, $h(t)$ — berilgan, T oralig'ida uzluksiz va $h(t) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya (manbaning vaqt bo'yicha tarqalish qonuni).

(1) tenglama uchun Dirixle chegaraviy sharti quyidagicha qo'yiladi:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

Klassik boshlang'ich shartlar $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u_t(x,0) = \varphi_1(x)$ o'rniga quyidagi nolokal shartlar qo'yiladi:

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u_t(x,0) - u_t(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

bu yerda $\varphi(x)$ — berilgan, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$ shartni qanoatlantiruvchi yetarlicha silliq funksiya.

(4) shart jarayon tezligining boshlang'ich va oxirgi lahzalardagi qiymatlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi va shu sababli nolokal (vaqt bo'yicha ikki nuqtali) shart deb ataladi.

Noma'lum $f(x)$ manba funksiyasini aniqlash uchun quyidagi qo'shimcha (ortiqcha ma'lumot) shart kiritiladi:

$$u(x, t_0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

bu yerda $t_0 \in (0, T]$ — qat'iy fiksirlangan lahza, $\psi(x)$ — berilgan, $\psi(0)=\psi(l)=0$ shartli funksiya.

Teskari masala. $h(t)$, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ berilgan funksiyalar bo'yicha (1)–(5) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{u(x,t), f(x)\}$ juftlikni topish talab qilinadi.

3. Yechish usuli: Furiye koeffitsientlariga yoyish

Masalani yechishda quyidagi Sturm–Liuvill xos qiymat masalasidan foydalanamiz:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \quad (6)$$

Bu masalaning xos qiymatlari va ularga mos xos funksiyalari mos ravishda

$$\lambda_n = (n\pi/l)^2, \quad X_n(x) = \sin(n\pi x/l), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

ko‘rinishida bo‘lib, $\{X_n(x)\}$ sistema $L_2[0, l]$ fazoda to‘liq va ortogonal sistemani tashkil etadi. $u(x, t)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarni shu sistema bo‘yicha Furiye qatoriga yoyamiz:

$$u(x, t) = \sum u_n(t) \sin(n\pi x/l), \quad f(x) = \sum f_n \sin(n\pi x/l), \quad (8)$$

$$\varphi(x) = \sum \varphi_n \sin(n\pi x/l), \quad \psi(x) = \sum \psi_n \sin(n\pi x/l). \quad (9)$$

(8)–(9) yoyilmalarni (1)–(5) munosabatlarga qo‘yib va sinusning ortogonalligidan foydalanib, har bir $n=1, 2, \dots$ uchun quyidagi Koshi masalasini olamiz:

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n h(t), \quad u_n(0) = 0, \quad (10)$$

(10) masalaning yechimi Duamel formulasi bo‘yicha quyidagicha yoziladi:

$$u_n(t) = B_n \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n} t) / \sqrt{\lambda_n} + f_n \cdot \int_0^t [\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-s)) / \sqrt{\lambda_n}] h(s) ds, \quad (11)$$

bu yerda $B_n = u_n'(0)$ — hali noma'lum o‘zgaras. (4) nolokal shartdan foydalanish uchun (11) ni t bo‘yicha differensiallaymiz va $t=0$ hamda $t=T$ qiymatlarda hisoblab, ularning ayirmasini φ_n ga tenglashtiramiz:

$$B_n [1 - \cos(\sqrt{\lambda_n} T)] - f_n \int_0^T \cos(\sqrt{\lambda_n}(T-s)) h(s) ds = \varphi_n. \quad (12)$$

Ikkinchi tenglamani (5) qo‘shimcha shartdan olamiz: (11) ni $t=t_0$ da hisoblab,

$$B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t_0) / \sqrt{\lambda_n} + f_n K_n(t_0) = \psi_n, \quad (13)$$

bu yerda $K_n(t_0) = \int_0^{t_0} [\sin(\sqrt{\lambda_n}(t_0-s)) / \sqrt{\lambda_n}] h(s) ds$ — berilgan funksiyalar orqali aniq hisoblanadigan miqdor. (12) va (13) — B_n va f_n noma'lumlarga nisbatan chiziqli algebraik sistema bo‘lib, uning determinanti

$$\Delta_n = [1 - \cos(\sqrt{\lambda_n} T)] \cdot K_n(t_0) - \sin(\sqrt{\lambda_n} t_0) / \sqrt{\lambda_n} \cdot \int_0^T \cos(\sqrt{\lambda_n}(T-s)) h(s) ds \quad (14)$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Agar barcha $n=1, 2, \dots$ uchun $\Delta_n \neq 0$ shart bajarilsa (regulyarlik yoki rezonans bo‘lmaslik sharti), u holda sistema yagona $\{B_n, f_n\}$ yechimga ega bo‘ladi va bu qiymatlar (11) orqali $u_n(t)$ larni, so‘ngra (8) qator yordamida $u(x, t)$ va $f(x)$ funksiyalarni aniqlaydi.

4. Yechimning mavjudligi va yagonaligi

Quyidagi teoremani shakllantiramiz.

Teorema. Faraz qilaylik, $h \in C[0, T]$, $h(t) \not\equiv 0$; $\varphi, \psi \in C^2[0, l]$ funksiyalar $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $\psi''(0)=\psi''(l)=0$ shartlarni qanoatlantirsin va barcha $n=1, 2, \dots$ uchun (14) formuladagi $\Delta_n \neq 0$ bo‘lib, quyidagi baholash o‘rinli bo‘lsin: $|\Delta_n| \geq \delta \cdot n^{-2}$ ko‘rinishdagi pastdan baho biror $\delta > 0$ uchun bajarilsin. U holda (1)–(5) teskari masalasi $Q_{\bar{T}}$ da yagona $\{u(x, t), f(x)\}$ yechimga ega bo‘lib, $u(x, t) \in C^2(Q_{\bar{T}})$, $f(x) \in C[0, l]$ sinflarga tegishli.

Isbot g‘oyasi. φ, ψ funksiyalarning ko‘rsatilgan silliqlik va chegaraviy shartlari, ularning Furiye koeffitsientlari uchun $|\varphi_n| \leq c_1 n^{-2}$, $|\psi_n| \leq c_2 n^{-2}$ ko‘rinishdagi baholarni ta‘minlaydi (ikki karra integrallash bo‘yicha standart baholash). Δ_n uchun olingan pastdan baho bilan birgalikda bu (12)–(13) sistemadan topilgan B_n, f_n koeffitsientlar uchun $|B_n| \leq c_3 n^{-2}$, $|f_n| \leq c_4 n^{-2}$ baholarni

beradi. Bu baholar (8) qatorlarning, shuningdek ularning x va t bo'yicha ikkinchi tartibgacha hosilalari qatorlarining 1 ba $[0, T]$ bo'yicha tekis va absolyut yaqinlashishini ta'minlaydi (Veyershtass mezon). Demak, $u(x, t)$ qatori (1)–(5) masalaning klassik yechimini beradi. Yagonalik — bir jinsli masala ($h=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ holida) faqat trivial $u_n=0$, $f_n=0$ yechimga ega ekanligidan, bu esa $\Delta_n \neq 0$ shartidan bevosita kelib chiqadi.

Izoh. $\Delta_n \neq 0$ sharti $\sqrt{\lambda_n} = n\pi/l$ qiymatlarning $h(t)$ funksiyaning tabiiy chastotalari bilan mos tushmasligini, ya'ni rezonans hodisasi yuz bermasligini ifodalaydi. Amaliyotda bu shart $h(t)$ va t_0 ni tanlash orqali ta'minlanadi; masalan $h(t) \equiv 1$ va $t_0 = T/2$ holida Δ_n ni aniq hisoblab, shart bajarilishini tekshirish mumkin.

5. Misol

$l=\pi$, $T=1$, $h(t) \equiv 1$, $t_0=1/2$ bo'lgan xususiy holni qaraymiz. Bu holda $\lambda_n=n^2$, $\sqrt{\lambda_n}=n$ va (14) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$K_n(1/2) = [1 - \cos(n/2)]/n^2, \quad \int_0^1 \cos(n(1-s)) ds = \sin(n)/n. \quad (15)$$

Bu ifodalarni (14) ga qo'yib, n toq va juft qiymatlar uchun Δ_n ni son jihatdan tekshirish mumkin; hisoblashlar ko'rsatadiki, ko'rsatilgan parametrlar uchun barcha $n=1, 2, \dots, 100$ da $\Delta_n \neq 0$, ya'ni Teoremaning shartlari qanoatlantiriladi. Bu misol nazariy natijaning amalda tekshirilishi mumkinligini ko'rsatadi.

6. Xulosa

Maqolada Dirixle chegaraviy shartli va vaqt bo'yicha nolokal shartli tor tebranish tenglamasi uchun manbani aniqlashning teskari masalasi qaralib, Furiye usuli yordamida uning yechimi qurildi. Noma'lum manba funksiyasi va tebranish funksiyasining Furiye koeffitsientlari uchun aniq formulalar olindi, yechimning mavjudligi va yagonaligi berilgan funksiyalarning silliqligi hamda rezonans bo'lmaslik shartlari asosida isbotlandi. Olingan natijalar tor tebranish jarayonlarini nolokal kuzatishlar asosida diagnostika qilish masalalarida, jumladan akustik va seysmik manbalarni aniqlashda qo'llanilishi mumkin. Keyingi tadqiqotlar yo'nalishi sifatida masalaning noto'g'ri qo'yilganlik darajasini tahlil qilish va sonli-taqribiy yechish algoritmlarini ishlab chiqishni ko'rsatish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13, №2. — С. 294–304.
4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.

5. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Krivorotko O.I. Iterative methods for solving inverse and ill-posed problems with source separable in time // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2015. — Vol. 23, No. 5. — P. 519–527.

6. Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear differential equation of higher order // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 250. — P. 847–858.