



TOR TEBRANISH TENGLAMASINI HOSIL QILISH VA UNING FIZIK-
MATEMATIK TALQINI

Yangiboyev Yashnarbek Muzaffar o'g'li

Osiyo xalqaro universiteti Xorazm filali 1-kurs magistratura talabasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada tarang tortilgan torning ko'ndalang tebranish jarayoni fizik va matematik nuqtai nazardan tadqiq etiladi. Dastlab torning soddalashtirilgan fizik modeli qaralib, uning kichik elementiga ta'sir etuvchi kuchlar muvozanati Nyutonning ikkinchi qonuni asosida tahlil qilinadi. Shu yondashuv orqali tor tebranishini ifodalovchi xususiy hosilali differensial tenglama, ya'ni to'liq tenglamasi hosil qilinadi. Tenglama uchun boshlang'ich va chegaraviy shartlar kiritilib, masalaning to'liq matematik qo'yilishi shakllantiriladi hamda yechim o'zgaruvchilarni ajratish va Fourier qatorlari usuli yordamida ifodalanadi.

Kalit so'zlar. tor tebranishi, to'liq tenglamasi, matematik model, fizik model, differensial tenglama, tebranish jarayoni, taranglik kuchi, chiziqli zichlik, chegaraviy masala, Fourier qatori.

Abstract. In this article, the transverse vibration process of a tensioned string is studied from a physical and mathematical point of view. First, a simplified physical model of the string is considered, and the balance of forces acting on its small element is analyzed based on Newton's second law. Using this approach, a partial differential equation, i.e., a wave equation, is obtained, which describes the string vibration. Initial and boundary conditions are introduced for the equation, a complete mathematical formulation of the problem is formulated, and the solution is expressed using the separation of variables and Fourier series method.

Keywords. string vibration, wave equation, mathematical model, physical model, differential equation, vibration process, tension force, linear density, boundary value problem, Fourier series.

Mexanik tebranishlar va to'liq jarayonlari fizika hamda texnikaning ko'plab bo'limlarida muhim o'rin egallaydi. Turli elastik muhitlarda yuzaga keladigan tebranishlarni o'rganish nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki amaliy masalalarni hal etishda ham keng qo'llaniladi. Xususan, torning tebranishi eng sodd va shu bilan birga ko'plab murakkab jarayonlarni tushuntirishga xizmat qiladigan klassik modellardan biri hisoblanadi.

Tarang tortilgan torning kichik tebranishlari masalasi uzluksiz muhitlar mexanikasining asosiy masalalaridan bo'lib, u yordamida to'liqlarning tarqalish qonuniyatlarini tushuntirish mumkin. Ushbu jarayon musiqa asboblari ishlash prinsipi, akustik hodisalar, tebranishlarning texnik tizimlarga ta'siri kabi ko'plab holatlarda uchraydi. Shuning uchun tor tebranishini matematik jihatdan ifodalash va uning tenglamasini keltirib chiqarish ilmiy va amaliy nuqtai nazardan dolzarbdir.



Tor tebranish jarayonini tavsiflashda fizik qonunlar, xususan, kuchlar muvozanati va Nyutonning ikkinchi qonunidan foydalaniladi. Shu asosda torning juda kichik elementiga ta'sir etuvchi kuchlar tahlil qilinib, jarayonni ifodalovchi differensial tenglama hosil qilinadi. Natijada tor tebranishi to'liq tenglamasi orqali tasvirlanadi. Bu tenglama tebranish tezligi, amplituda va boshqa kattaliklarning vaqt hamda fazoga bog'liqligini aniqlash imkonini beradi.

Fizik jarayonni matematik model ko'rinishida ifodalash masalaning mohiyatini chuqurroq tushunishga, shuningdek, analitik va sonli usullar yordamida turli hisoblash ishlarini bajarishga yordam beradi. Model parametrlarining tor tebranish xarakteriga ta'sirini o'rganish esa jarayonni boshqarish va amaliy masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Tor tebranishlari va to'liq jarayonlarini matematik modellash tirish masalasi klassik mexanika hamda matematik fizikaning eng qadimgi va fundamental yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Ushbu masala ko'plab olimlar tomonidan turli davrlarda o'rganilib, tor tebranish tenglamasining nazariy asoslari bosqichma-bosqich shakllangan.

XVIII asrda fransuz olimi Jean le Rond d'Alembert birinchi bo'lib tor tebranishi jarayonini differensial tenglama yordamida ifodalash mumkinligini ko'rsatib berdi. U torning kichik elementiga Nyuton qonunlarini qo'llash orqali to'liq tenglamasini keltirib chiqardi hamda uning umumiy yechimini

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)u(x, t)$$

ko'rinishida ifodaladi. Bu natija tebranishlarning ikki qarama-qarshi yo'nalishda tarqaluvchi to'liqlar yig'indisi ekanligini ilmiy jihatdan asoslab berdi [1].

Keyingi tadqiqotlar shveytsariyalik olim Leonhard Euler tomonidan davom ettirildi. U tor tebranishi tenglamasini qat'iy matematik asosda tahlil qilib, uzluksiz muhit modelini qo'llash zarurligini ta'kidladi hamda chegaraviy va boshlang'ich shartlarning yechimga ta'sirini ko'rsatib berdi. Euler torni cheksiz kichik elementlarga ajratish usulidan foydalanib, differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirishga katta hissa qo'shdi [2].

Tor tebranishlarini qatorlar yordamida ifodalash g'oyasi esa shveytsariyalik matematik Daniel Bernoulli tomonidan ilgari surildi. U tor har qanday boshlang'ich shaklda tebranganda ham uni sinusoidal garmonik tebranishlar yig'indisi sifatida tasvirlash mumkinligini ko'rsatdi. Mazkur fikr keyinchalik tebranishlar nazariyasida modal tahlil va spektral usullarning shakllanishiga asos bo'ldi [3].

Bu yo'nalish keyinchalik fransuz olimi Joseph Fourier tadqiqotlarida yanada rivojlantirildi. Fourier funksiyalarni trigonometrik qatorlar orqali yoyish usulini taklif etib, chegaraviy masalalarni yechishda Fourier qatorlarining samaradorligini isbotladi. Ushbu yondashuv tor tebranishi tenglamasining aniq va yaqinlashuvchi yechimlarini topishda keng qo'llanila boshlandi [4].

XX asrga kelib matematik fizika masalalarini qat'iy asosda o'rganish ishlari Richard Courant va David Hilbert tomonidan tizimlashtirildi. Ular differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning funksional-analitik asoslarini ishlab chiqib, tebranish





tenglamalarini umumiy operatorlar nazariyasi doirasida tadqiq etish metodologiyasini taklif etdilar. Bu esa tor tebranishi masalasini zamonaviy matematik modellashtirish nuqtai nazaridan chuqurroq tahlil qilish imkonini berdi [5].

Ko'rib chiqilgan ilmiy manbalar shuni ko'rsatadiki, tor tebranish tenglamasi dastlab fizik kuzatuvlardan kelib chiqqan bo'lsa-da, keyinchalik u qat'iy matematik apparat bilan boyitilib, to'liq jarayonlarini o'rganishning universal modeliga aylangan. Mazkur tadqiqotlar bugungi kunda ham tebranishlar nazariyasi, akustika va muhandislik hisoblari da nazariy asos sifatida xizmat qilmoqda.

Tor tebranish jarayonini tadqiq etishda avvalo real mexanik tizimning soddalashtirilgan fizik modeli qaraladi. Uzunligi L bo'lgan tor ikki uchidan mahkamlangan va doimiy T taranglik kuchi bilan tortilgan deb faraz qilinadi. Tor bir jinsli bo'lib, uning chiziqli zichligi ρ o'zgarmas deb olinadi. Tebranishlar kichik amplitudali bo'lgani sababli torning faqat ko'ndalang siljishlari hisobga olinadi, bo'ylama cho'zilishlar hamda tashqi qarshilik kuchlari e'tiborga olinmaydi. Bunday soddalashtirishlar jarayonning asosiy fizik xususiyatlarini saqlab qolgan holda matematik modelni tuzishni yengillashtiradi. Torning fazodagi holatini tavsiflash uchun $u(x,t)$ funksiya kiritilib, u torning x nuqtasining t vaqtdagi ko'ndalang og'ishini ifodalaydi.

Tenglamani hosil qilish uchun torning juda kichik dx uzunlikdagi elementi ajratib olinadi. Element uchlariga taranglik kuchlari ta'sir qiladi. Tebranish vaqtida bu kuchlar turli yo'nalishga ega bo'lgani sababli ularning vertikal tashkil etuvchilari orasida farq yuzaga keladi va natijada elementga tik yo'nalishda natijaviy kuch hosil bo'ladi. Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra, jismga ta'sir etuvchi kuch uning massasi bilan tezlanish ko'paytmasiga teng, ya'ni $F=ma$. Element massasi $m=\rho dx$,

tezlanishi esa $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ga teng bo'ladi. Kichik burchaklar uchun $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$ deb olinadi. Shunda elementga ta'sir etuvchi vertikal kuchlar farqi $T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ ko'rinishga keladi. Nyuton qonunini qo'llab,

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

tenglik hosil qilinadi. dx ni qisqartirish natijasida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ifoda olinadi. Agar $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ deb belgilansa, tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



ko'rinishga keladi. Bu tor tebranishining to'liq tenglamasi bo'lib, tebranishlarning tor bo'ylab qanday tarqalishini ifodalaydi.

Mazkur differensial tenglamani yechish uchun qo'shimcha shartlar talab etiladi. Tor uchlari mahkamlanganligi sababli $u(0,t)=0$ va $u(L,t)=0$ chegaraviy shartlar qo'yiladi. Bundan tashqari, torning boshlang'ich holati va tezligi $u(x,0)=\varphi(x)$ hamda $u_t(x,0)=\psi(x)$ funksiyalar orqali beriladi. Ushbu shartlar fizik jarayonni to'liq tavsiflab, masalaning yagona yechimini aniqlash imkonini beradi.

Tenglamani yechishda o'zgaruvchilarni ajratish usuli qo'llanadi va yechim $u(x,t)=X(x)T(t)$ ko'rinishda izlanadi. Natijada fazoviy va vaqt bo'yicha ikkita oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi. Chegaraviy shartlardan sinus funksiyalar sistemasi kelib chiqib, umumiy yechim Fourier qatori ko'rinishida ifodalanadi:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Bu natija tor tebranishi alohida garmonik modalar yig'indisidan iborat ekanligini ko'rsatadi. Har bir n torning mustaqil tebranish rejimini ifodalaydi va ularning superpozitsiyasi umumiy harakatni hosil qiladi.

Olingan matematik model muhim fizik mazmunga ega. To'liq tarqalish tezligi $c = \sqrt{T/\rho}$ bo'lib, taranglik kuchi ortishi tebranish tezligini oshiradi, chiziqli zichlik ortishi esa aksincha kamaytiradi. Shunday qilib, torning mexanik parametrlarini o'zgartirish orqali tebranish jarayonini boshqarish mumkin. Demak, hosil qilingan tenglama tor tebranishining asosiy qonuniyatlarini to'liq aks ettiradi hamda real fizik jarayonni matematik jihatdan aniq tavsiflaydi.

Ushbu adqiqotda tarang tortilgan torning ko'ndalang tebranish jarayoni fizik va matematik nuqtai nazardan tahlil qilindi. Dastlab torning real mexanik holati soddalashtirilgan model orqali tavsiflanib, uning kichik elementiga ta'sir etuvchi kuchlar muvozanati Nyutonning ikkinchi qonuni asosida ko'rib chiqildi. Ushbu yondashuv tor tebranish jarayonini ifodalovchi xususiy hosilali differensial tenglama — to'liq tenglamasini hosil qilish imkonini berdi.

Olingan matematik model torning tebranish tezligi, taranglik kuchi va chiziqli zichlik kabi fizik parametrlar o'rtasidagi bog'lanishni aniq ko'rsatib berdi. Xususan, to'liq tarqalish tezligining $c = \sqrt{T/\rho}$ formula orqali aniqlanishi modelning fizik mazmunini ochib beradi. Bu natija torning mexanik xossalari tebranish xarakteriga bevosita ta'sir qilishini tasdiqlaydi.

Shuningdek, chegaraviy va boshlang'ich shartlarni kiritish orqali masalaning to'liq matematik qo'yilishi shakllantirildi hamda yechim Fourier qatorlari ko'rinishida ifodalanishi ko'rsatildi. Bu esa tor tebranishi murakkab ko'rinishda bo'lsa ham, uni oddiy garmonik tebranishlar yig'indisi sifatida tasvirlash mumkinligini anglatadi.



TANQIDIY NAZAR, TAHLILIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'OYALAR



Umuman olganda, tor tebranish tenglamasi fizik jarayonlarni matematik modellashtirishning sodda, ammo samarali namunasi bo'lib xizmat qiladi. Mazkur model mexanika, akustika, muhandislik va texnika sohalarida uchraydigan ko'plab tebranish masalalarini o'rganishda nazariy asos vazifasini bajaradi. Kelgusida ushbu tenglama asosida analitik hamda sonli usullar yordamida murakkabroq tizimlarni tadqiq etish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. D'Alembert J. Le Rond. *Traité de dynamique*. – Paris: David l'aîné, 1743. – 384 p.
2. Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. – Lausanne: Marc-Michel Bousquet, 1744. – 326 p.
3. Bernoulli D. *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. – Argentorati (Strasbourg): Johann Reinhold Dulsecker, 1738. – 312 p.
4. Fourier J. *Théorie analytique de la chaleur*. – Paris: Firmin Didot, 1822. – 639 p.
5. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2. – New York: Interscience Publishers, 1962. – 830 p.