



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ПУЗЫРЬКОВ В
ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ ВОДОХРАНИЛИЩА ПАЧКАМАР

Уктам Ибрагимович Бегимов

Alfraganus university, рақамли технологиялари кафедра доценти

Садокат Шермахматовна Сарманова

Alfraganus university, рақамли технологиялари кафедра ўқитувчиси

ANNOTATION: *The formation of a cumulative jet and the growth of kinetic energy in its movement are considered. The processes preceding the formation of a cumulative jet and phenomena accumulating over many periods with weak pulsations are studied. The shapes of deformable cavities are studied. The differential equation of moving potentials is given, through which the relative volumes of the cavities are found. The presented method of moving potentials and the entire computational procedure can be successfully applied to solve other problems in the study of cavity dynamics; the mixture is ideal.*

Key words: *phase shift of the harmonic component of external pressure, surface shape, ideal mixture.*

АННАТАЦИЯ: *Рассматривается образование кумулятивной струйки и рост кинетической энергии в ее движения. Изучаются процессы, предшествующие образованию кумулятивной струйки, и накапливающиеся за много периодов явления при слабых пульсациях. Исследуются формы деформирующихся полостей. Приводится дифференциальное уравнение подвижных потенциалов, через которых находится относительные объемы полостей. Приведенный метод подвижных потенциалов, и вся вычислительная процедура может успешно применяться для решения и других задач по исследованию динамики каверн, смесь идеальная.*

ключевые слова: *сдвиг фазы гармонической составляющей внешнего давления, форма поверхности, смесь идеальная.*

Рост и сжатие кавитационных полостей в дисперсной смеси происходит вблизи поверхностей раздела или в условиях взаимодействия с соседними полостями. Эти обстоятельства оказывают существенное влияние на характер движения кавитационных полостей и, следовательно, на характеристики излучаемого ими шума и производимую эрозию твердых границ раздела водовыпускного сооружения Каркидонского водохранилища. Исследованиями установлено, что при движении полостей вблизи ограничивающих поверхностей или других пузырей форма поверхности становится отличной от сферической (рис.1,2). Рассматривается образование кумулятивной струйки и рост кинетической энергии в ее движения.

Пусть в области G_0 занятой дисперсной смесью и ограниченной твердыми поверхностями раздела $\Sigma_k, (k = 1, m)$ содержится совокупность кавитационных



TANQIDIY NAZAR, TAHLILIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'OYALAR



полостей, центры которых расположены на прямой линии. Предполагается, что в начальный момент времени поверхности каверн сферические, жидкость покоится, а границы расположены таким образом, что задача является симметричной относительно линии, проходящей через центры каверн, [1,2]. Начиная с некоторого момента времени $t = 0$, давление в дисперсной смеси на бесконечности начинает изменяться по гармоническому закону

$$p'_\infty = p_\infty + A_m \cdot \sin(\omega t + \gamma) \quad (1)$$

где p'_∞ - давление на бесконечности в момент времени $t = 0$, A_m - амплитуда, ω - круговая частота, γ - сдвиг фазы гармонической составляющей внешнего давления. В результате, полости начинают сжиматься (расширяться) и, взаимодействуя с границами раздела и соседними полостями, движение полостей поступательно перемещаются. Предположим, что дисперсная смесь идеальная, не-сжимаемая; плотности и объёмные концентрации постоянны. Давление газа внутри полости изменяется по закону политропии:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma_1};$$

где γ_1 - показатель политропии. Масса обмен не учитывается. Течение дисперсной смеси потенциальное

$$\vec{V}_{cm} = grad \varphi_{cm}, \quad (2)$$

потенциал скорости- $\varphi_{cm} = \frac{\rho_1^* \varphi_1}{\rho_{cm}}$.

Векторы скоростей дисперсной смеси определяется равенствами:

$$\vec{V}_{cm} = f_1^* \vec{V}_1 + f_2^* \vec{V}_2$$

Объёмные концентрации для дисперсной смеси, постоянные и имеют вид:

$$f_1^* = \frac{f_1}{f_2 + n f_1}, \quad f_2^* = \frac{f_2}{f_2 + n f_1} \quad (3)$$

Где $n = \frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}}$ - отношение истинных плотностей дисперсных смесей, жидкостей, [6].

ρ_{1i} - истинные плотности жидкости и ρ_{2i} газового пузырька.

f_1 - объёмные концентрации жидкости и f_2 - газа. Введем безразмерные переменные

$$\hat{t} = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{|\Delta|}{\rho}}, \hat{r} = \frac{r}{R_0}, \hat{z} = \frac{z}{R_0}, \hat{w}_i = \frac{w_i}{w_{0i}}, i = 1, 2, \dots, m, \hat{\varphi} = \frac{\varphi}{R_0} \sqrt{\frac{\rho}{|\Delta|}}, \Delta = (p_\infty^1 - p_\infty^0 + p_m)$$



TANQIDIY NAZAR, TAHLILIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'OYALAR



где R_0 - начальный радиус одной из каверн; w_i - объем i -ой полости; w_{0i} - начальный объем i -ой полости в начальный момент времени,[4]. В безразмерных переменных задача сводится к определению потенциала $\hat{\phi}(r, z, t)$, удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{z}^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} = \kappa + f(k_i - 1) - \frac{1}{2} (V_{cmr}^{(i)2} + V_{cmz}^{(i)2}) + \zeta [\sin(\omega \cdot \hat{t}) - 1] + \beta_i (1 - \hat{w}_i^{-\gamma}), (\hat{r}, \hat{z}) \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$$\lim_{(r,z) \rightarrow \infty} \hat{\phi}(\hat{r}, \hat{z}, \hat{t}) = 0, (\hat{r}, \hat{z}) \in \Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = 0, (\hat{r}, \hat{z}) \in \Omega \quad i = 1, 2, \dots, m1. \quad (7)$$

$$\hat{\phi}(\hat{r}, \hat{z}, 0) = 0, (\hat{r}, \hat{z}) \in \Omega \quad (8)$$

где Γ_i - поверхность i -ой полости; ρ - плотность жидкости; p - давление в жидкости; $p_\Gamma^{(i)}$ - давление газа внутри i -ой полости; σ - коэффициент поверхностного натяжения;

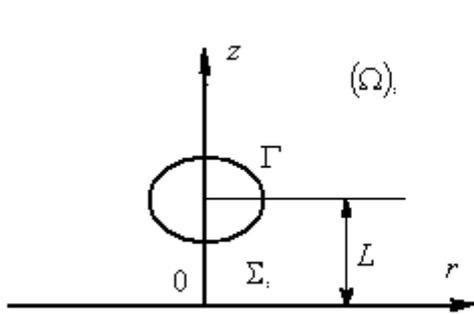


Рис.1.

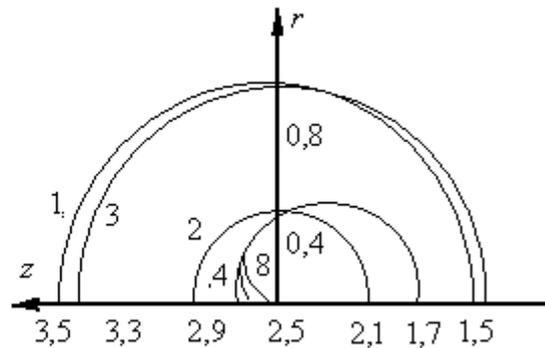


Рис.2.

K_i - средняя кривизна поверхности i -ой полости; m - число полостей; m_j - число твердых границ раздела, где $\kappa = \frac{\Delta}{|\Delta|}$; $f = \frac{2\sigma}{(R_0|\Delta|)}$ - коэффициент,

характеризующий влияние сил поверхностного натяжения, k_i - средняя кривизна поверхности Γ_i i -ой полости, $\zeta = \frac{p_m}{|\Delta|}$ - коэффициент периодической составляющей

давления, γ - показатель политропы,[7] $\beta_i = \frac{p_{\Gamma 0}^{(i)}}{|\Delta|}$ - коэффициент сжатия газа,

$V_{cmr}^{(i)} = \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right|_{\Gamma_i}$, $V_{cmz}^{(i)} = \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right|_{\Gamma_i}$ - компоненты векторов скоростей "жидких" частиц на

образующей i ой полости. Здесь (4) является условием потенциальности движения



жидкости; (5) - условие Лагранжа-Коши; (6) - условие затухания возмущений, вызванных движением полостей, на бесконечности; (7)- начальное условие, задаваемое с точностью до аддитивной постоянной.

Уравнение, описывающее изменение со временем конфигураций, образующих поверхностей каверн, имеет вид

$$\frac{dR(t, \alpha_i)}{dt} = v_r^{(i)}, \quad \frac{dZ(t, \alpha_i)}{dt} = v_z^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

где $R = R(t, \alpha_i)$, $Z = Z(t, \alpha_i)$ - уравнения образующей i -ой полости (α_i - параметр) и представляют собой уравнения движения 'жидких' частиц, расположенных в точках образующей i -ой полости.

Для решения полученных уравнений применяется численный метод, при этом в каждой полости выбраны гидродинамические особенности и искомые потенциалы скоростей в виде (2). Внутри полостей, на оси симметрии задачи, выбираются сосредоточенные гидродинамические особенности. Искомый потенциал скоростей $\hat{\phi}(r, z, t)$ замещается суперпозицией потенциалов указанных особенностей. Имеем уравнение:

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m A_k^{(i)} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + (z - z_k)^2)}} \quad (10)$$

где $A_k^{(i)}$ $k = 1, \infty$ интенсивности особенностей, выбираемых внутри i -ой полости, $(0, z_k^{(i)})$ - их начальные координаты. Для удовлетворения граничным условиям применяем численный метод. Решение исходной задачи принимает вид:

$$\hat{\phi} = \Phi(\hat{r}, \hat{z}, A_1^{(1)}(t), A_2^{(1)}(t), \dots, z_1^{(1)}(t), z_2^{(1)}(t), \dots, A_1^{(2)}(t), A_2^{(2)}(t), \dots) \quad (11)$$

Здесь функция Φ зависит от $r, z, A_k^{(i)}(t), z_k^{(i)}(t), i = (1, m), k = (1, \infty)$ и от конфигурации и первоначального расположения границ раздела $\Gamma_i, i = (1, m), .$

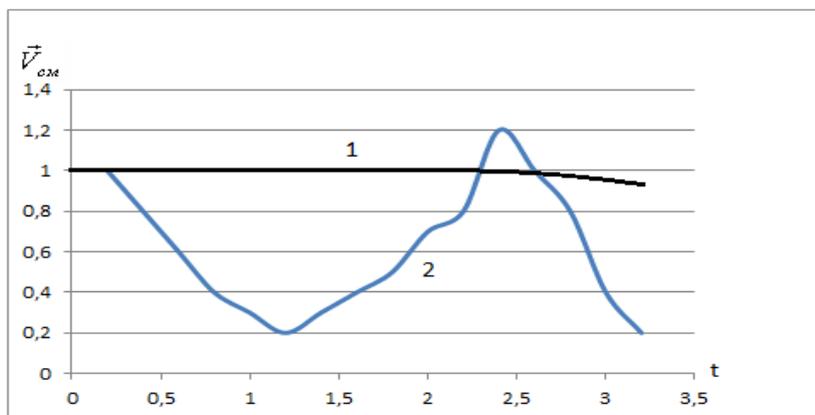


Рис.3 Относительные объемы полостей $w_i, i = (1, m)$, вычисляются с помощью решения дифференциальных уравнений вида





TANQIDIY NAZAR, TAHLILIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'OYALAR



$$\frac{d\hat{w}_i}{dt} = -3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^{(i)}(t)}{\tilde{R}_0^{(i)3}}, \quad i = (1, m), \quad (12)$$

где $\tilde{R}_0^{(i)}$ - есть отношение начального радиуса i - полости к характерному размеру R_0 . Каждое из уравнений (12) представляет условие соответствия скорости изменения объема i -ой полости скорости поступления в нее жидкости от гидродинамических особенностей, расположенных внутри нее.

На основе вышесказанного строится численная процедура. На образующих поверхностях каверн, являющихся результатом сечения их какой-либо плоскости, проходящей через ось z , выбирается конечная система точек с координатами $(R_{l0}^{(i)}, Z_{l0}^{(i)})$ $l = (1, M)$ где M некоторое заранее заданное четное число. Внутри каждой полости (на оси симметрии) выбирается $N = \frac{M}{2}$ особенностей. В результате функция (11) принимает вид

$$\hat{\phi} = \Phi(r, z, A_1^{(i)}, z_1^{(i)}) \quad , \quad i = (1, m), k = (1, N) \quad (13)$$

Решение сводится к слежению за движением "жидких" частиц, расположенных в начальный момент времени в выбранных на образующих полостей точках. На каждом шаге по времени скорости движения и изменения интенсивностей источников вычисляются с использованием следующего уравнения:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial A_k^{(j)}} \right|_{\Gamma_i} \tilde{A}_k^{(i)} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z_k^{(i)}} \right|_{\Gamma_i} = \kappa + f(k_i - 1) - 2(V_{cmr}^{(i)2} + V_{cmz}^{(i)2}) + \beta_i (1 - \hat{w}_i^{-\gamma}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

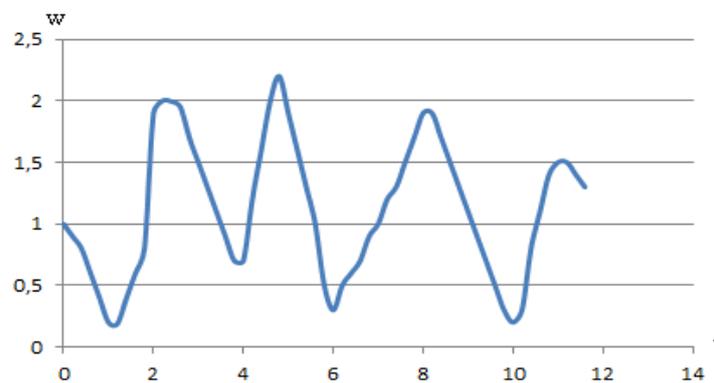


Рис.4. системы выбранных точек, в которых в данный момент времени находятся выбранные "жидкие" частицы.

Система (14) является результатом проекции (5) на системы выбранных точек, в которых в данный момент времени находятся выбранные "жидкие" частицы. Система линейных алгебраических уравнений (14) относительно $\tilde{A}_k^{(j)}$ и $z_k^{(j)}$ является плохо обусловленной. Поэтому для ее решения системы (21) использовался метод регуляризации Тихонова А.Н. [7]. Для расчета параметра регуляризации



использовался следующий метод. В качестве α выбиралось α_j из $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k = \alpha_n q^{k-1}$, $0 < q < 1$, $\alpha_k \in [\alpha_n, \alpha_{kn}]$, которое удовлетворяет условию $\|z_{j+1} - z_j\| = \min_i \|z_{i+1} - z_i\|$, где z_i есть решение исходной системы, полученное при $\alpha = \alpha_i$ а α_n и α_{kn} - заранее выбираемые границы изменения параметра. Для вычисления приближенных значений производных, используемых для определения средней кривизны в точках поверхностей каверн, использовался интерполяционный кубический сплайн. Для численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод Хэмминга 4-го порядка с автоматическим выбором шага. На каждом шаге по времени точность решения системы (14) контролировалась и при достижении ею заданного предельного значения расчеты прекращались.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Кнэпп Р., Дэйли Дж., Хэммит Ф.Г. Кавитация. М.: Мир. 1974.
2. Левковский Ю.Л. Структура кавитационных течений. Л.; Судостроение, 1978.
3. Воинов О.В., Воинов В.В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки с образованием кумулятивной струйки. Докл. АН СССР, 1976, 227, 1, 63 - 66.
4. Тихонов А.Н, Арсенин В.Л. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
5. Кузнецов Г.Н., Щекин И.Е. Движение пузырей вблизи излучателя. Акуст. журнал, 6, 1976, С. 37-45.
6. Хамидов А.А. Плоские и осесимметрические задачи о струйном течении идеальной сжимаемой жидкости. -Ташкент: Фан, 1978.
7. Хамидов А.А., Худайкулов С.И. Теория струй многофазных вязких жидкостей. «ФАН» Ташкент 2003г.140
8. Бегимов Ў.И., Худайкулов С.И. “Моделирование движений возмущенной каверны и появления кавитации, пульсации потока”, «Мухаммад ал-хоразмий авлодлари» №3(9), Тошкент-2019. С. 39-41.
9. U.I. Begimov, “Spatial caverns in flows with disturbances and their influence on the safety of hydraulic structures” International scientific journal «Global science and innovations 2020: Central Asia» Nur-Sultan, Kazakhstan, Feb-march 2020.