



TANQIDIY NAZAR, TAHLILIIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'UYALAR



TO'LIQIN TARQALISH TENGLAMASI UCHUN KOEFFISIYENTNI ANIQLASHNING TESKARI MASALASI

Axmedjanova Roziyajon Raximbayevna

Osiyo Xalqaro Universiteti matematika yo'nalishi I-bosqich magistranti

Annotatsiya: Ushbu tezisda to'liqin tarqalish tenglamasining teskari masalasi, ya'ni tenglama tarkibidagi noma'lum koeffitsiyentni chegaraviy yoki qo'shimcha kuzatuv ma'lumotlari asosida aniqlash muammosi o'rganiladi. Teskari masalalar zamonaviy matematik fizika, geofizika, akustika, tibbiy diagnostika, hamda elektromagnit to'liqinlar nazariyasi kabi ko'plab sohalarda muhim o'rin tutadi. To'liqin tenglamasi uchun asosiy to'g'ri va teskari masalalar, teskari muammoning qo'yilishi, yechimning mavjudligi, yagona va barqarorligi shartlari, identifikatsiya metodlari, shuningdek sonli matematik usullar ko'rib chiqilib, misollar orqali teskari masalaning fizik ma'nosi haqida fikr va mulohazalar yuritiladi va atroflicha bayon etiladi.

Kalit so'zlar: to'liqin tenglamasi, teskari masala, koeffitsiyentni aniqlash, identifikatsiya, Cauchy masalasi, barqarorlik, yaxshi qo'yilmagan masala, sonli usullar.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Аннотация: В данной статье изучается обратная задача для уравнения распространения волн, то есть задача определения неизвестного коэффициента в уравнении по граничным или дополнительным данным наблюдений. Обратные задачи играют важную роль во многих областях, таких как современная математическая физика, геофизика, акустика, медицинская диагностика, дистанционное зондирование и теория электромагнитных волн. В статье рассматриваются основные прямые и обратные задачи для волнового уравнения, формулировка обратной задачи, условия существования, единственности и устойчивости решения, методы идентификации, а также численные математические методы. Физический смысл обратной задачи обсуждается и подробно поясняется на практических примерах.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратная задача, определение коэффициента, тождество, задача Коши, устойчивость, некорректная задача, численные методы.

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE COEFFICIENT FOR THE WAVE PROPAGATION EQUATION



Annotation: *This thesis studies the inverse problem of the wave propagation equation, that is, the problem of determining the unknown coefficient in the equation based on boundary or additional observational data. Inverse problems play an important role in many areas, such as modern mathematical physics, geophysics, acoustics, medical diagnostics, remote sensing, and electromagnetic wave theory. The article considers the main direct and inverse problems for the wave equation, the formulation of the inverse problem, the conditions for the existence, uniqueness, and stability of the solution, identification methods, as well as numerical mathematical methods. The physical meaning of the inverse problem is discussed and explained in detail through practical examples.*

Keywords: *wave equation, inverse problem, coefficient determination, identity, Cauchy problem, stability, ill-posed problem, numerical methods.*

KIRISH

Barchamizga ma'lumki, to'liq jarayonlari tabiatda va texnikada keng uchraydi ya'ni akustik to'liqlar, elektromagnit to'liqlar, seysmik to'liqlar, suv to'liqlari va boshqalar. Ushbu jarayonlarni tasvirlashda matematik fizikaning asosiy differensial tenglamalaridan biri bo'lgan to'liq tenglamasi muhim ahamiyatga ega. Ko'plab fizik masalalarda to'liq jarayonlarni tavsiflovchi barcha parametrlar aniq bo'lmashligi mumkin. Masalan, to'liq tezligi yoki zichlik, elastiklik moduli kabi kattaliklar noma'lum bo'lib, ularni tajriba orqali yoki qo'shimcha kuzatuv ma'lumotlar asosida aniqlash talab etiladi. Shuning uchun teskari masalalar differensial tenglama parametrlarini, boshlang'ich yoki chegaraviy shartlarni, manba funksiyasini aniqlashga qaratilgan masalalar matematik-fizik tadqiqotlarning muhim va faol rivojlanayotgan yo'nalishiga aylangan.

ASOSIY QISM

Teskari masalalar ko'pincha yaxshi qo'yilmagan bo'lishi bilan ajralib turadi, yechim mavjud bo'lmashligi, yagona bo'lmashligi yoki kirish ma'lumotlariga juda sezgir bo'lishi mumkin. Maqolada to'liq tarqalish tenglamasi uchun koeffitsiyentni aniqlashning teskari masalasi nazariy va amaliy jihatdan batafsil yoritiladi. Avvalo to'g'ri masala, so'ngra teskari masala qo'yiladi, keyin yechimning mavjudligi, yagona va barqarorligi muhokama qilinadi. Shuningdek, koeffitsiyentni aniqlashda qo'llaniladigan analitik va sonli metodlar ko'rib chiqiladi. To'liq jarayonlari tabiatda va texnikada eng ko'p uchraydigan hodisalardan biri hisoblanadi. Akustik, elektromagnit, seysmik, gidravlik va boshqa turdagi to'liqlar muhitning fizik xossalariga bog'liq ravishda tarqaladi. Ularni tadqiq qilishda matematik fizikaning asosiy differensial tenglamalaridan biri bo'lmish to'liq tenglamasi qo'llaniladi. Amaliy vaziyatlarda bu tenglama tarkibidagi ayrim parametrlar noma'lum bo'lishi mumkin. Masalan, to'liq tezligi, zichlik, elastiklik moduli yoki tashqi muhitning boshqa fizik xususiyatlari oldindan aniq bo'lmashligi mumkin. Shuning uchun ushbu parametrlarni qo'shimcha kuzatuv ma'lumotlari asosida tiklash zarur bo'ladi. Parametrlarni ana shunday qayta tiklashga doir masalalar matematikada teskari masalalar deb ataladi. Teskari masalalar klassik to'g'ri masalalardan tubdan farq qiladi. To'g'ri masalada



TANQIDIY NAZAR, TAHLILIIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'OYALAR



tenglama, boshlang'ich va chegaraviy shartlar berilgan bo'lib, yechimni topish talab etiladi. Teskari masalada esa, aksincha, tenglama yoki uning tarkibidagi biror funksiya noma'lum bo'ladi va uni kuzatuv ma'lumotlari orqali aniqlash vazifasi qo'yiladi. Bunday masalalar ko'pincha yaxshi qo'yilmagan bo'ladi, ya'ni yechimning mavjudligi, yagona bo'lishi yoki berilgan ma'lumotlarga barqaror bog'liqligi kafolatlanmaydi. Bu esa teskari masalalarni nazariy va amaliy jihatdan yanada murakkab qiladi. To'liq tenglamasi uchun koeffitsiyentni aniqlash masalasi shunday teskari masalalardan biridir. Unda to'liq tenglamasining tarkibidagi to'liq tarqalish tezligi yoki unga ekvivalent bo'lgan boshqa parametr noma'lum bo'ladi. Ushbu parametрни tajriba natijasida olingan qo'shimcha kuzatuv ma'lumotlari asosida tiklash kerak bo'ladi. Masalan, ma'lum bir nuqtada vaqt bo'yicha o'lchangan to'liq amplitudasi yoki tezligi haqidagi ma'lumotlar parametрни tiklashga asos bo'lishi mumkin. Fizik nuqtai nazardan qaralganda, to'liqning qanday tezlikda tarqalishi muhitning ichki tuzilishiga bog'liq. Masalan, yer qatlamlarida to'liq tarqalish tezligi zichlik va elastiklik moduliga bog'langan. Shuning uchun seysmik o'lchovlar asosida yer osti qatlamlarining fizik xossalarini tiklash aynan teskari masalalar yordamida amalga oshiriladi. To'liq tenglamasi uchun koeffitsiyentni aniqlash muammosi ko'plab sohalarda uchraydi. Masalan, geofizikada yer ostidagi qatlamlarning tuzilishini aniqlash, akustikada muhitning tovush o'tkazuvchanligini tekshirish, tibbiy diagnostikada ultratovush signallari orqali to'qimalarning zichligini baholash, mexanikada konstruksiyalar ichidagi nuqsonlarni aniqlash kabilar ushbu turdagi teskari masalalarga misol bo'la oladi. Shu bois bu mavzu hozirgi kunda ham nazariy, ham amaliy jihatdan dolzarbligini yo'qotmagan. Teskari masalaning yechilishi uchta asosiy jihatga bog'liq: mavjudlik, yagonalik va barqarorlik. Mavjudlik shuni bildiradiki, berilgan kuzatuv ma'lumotlariga mos keladigan parametr haqiqatan mavjud bo'lishi kerak. Yagonalik esa bitta kuzatuv ma'lumotlari to'plami uchun faqat bitta koeffitsiyent mos kelishi kerakligini anglatadi. Barqarorlik esa kuzatuv ma'lumotlaridagi kichik xatoliklar natijaviy koeffitsiyentda juda katta og'ishlar keltirib chiqarmasligi zarurligini ifodalaydi. Amaliy o'lchovlarda xatoliklar doimo mavjud bo'lgani sababli aynan barqarorlik masalasi teskari masalalarni yechishda eng muhim vazifalardan biridir. To'liq tenglamasi uchun koeffitsiyentni aniqlash muammosining nazariy yechimi odatda integral tenglamalar, spektral usullar, funksional analiz yondashuvlari, maxsus identifikatsiya algoritmlari orqali topiladi. Ayrim yondashuvlarda kuzatuv ma'lumotlari yordamida soxta vaqt bo'yicha qayta ishlash yoki orqaga evolyutsiya jarayonlaridan foydalaniladi.

Ko'plab nazariy teoremlar to'liq jarayoni yetarlicha silliq bo'lganda va kuzatuv ma'lumotlari ma'lum vaqt davomida to'planganda koeffitsiyentni tiklash mumkinligini ta'kidlaydi. Shunga qaramay, amaliy masalalarda ko'pincha nazariy shartlar to'liq bajarilmaydi va masala qo'shimcha cheklovlarisiz hal qilib bo'lmaydi. Shu sababli sonli metodlar teskari masalaning amaliy yechimida alohida ahamiyat kasb etadi. Eng ko'p qo'llaniladigan usullarning biri regulyarizatsiya metodlaridir. Ular teskari masalaning yaxshi qo'yilmaganligini yumshatib, beqaror yechimlarni barqarorlashtirishga yordam



TANQIDIY NAZAR, TAHLILIIY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'UYALAR



beradi. Regulyarizatsiya jarayonida qo'shimcha stabilizatsiya parametrlaridan foydalaniladi va yechimning tekisligi yoki silliqiligi ta'minlanadi. Iteratsion metodlar ham keng tarqalgan bo'lib, ularda dastlab koeffitsiyentning taxminiy qiymati olinadi, so'ngra kuzatuv ma'lumotlariga mos ravishda ketma-ket tuzatib boriladi. Bundan tashqari, chegaraviy elementlar, sonli differensiallashtirish usullari, optimallik shartlariga asoslangan variatsion yondashuvlar ham samarali natijalar beradi. Sonli modellashtirishning zamonaviy dasturiy paketlari esa teskari masalalarni amaliy jihatdan juda aniq hal qilish imkonini yaratadi. To'lqin tarqalish tezligini tiklashning amaliy tatbiqlari juda ko'p. Geofizik tadqiqotlarda yer qatlamlarining zichlik va elastiklik parametrlari teskari masalalar yordamida aniqlanadi, bu esa foydali qazilma konlarini aniqlash, yer qimirlashi xavfini baholash va muhandislik-geologik tadqiqotlarni o'tkazishda muhim rol o'ynaydi. Tibbiyotda esa ultratovush tekshiruvlari orqali yumshoq to'qimalarning ichki strukturasi teskari masalalar yordamida rekonstruksiya qilish mumkin. Radiolokatsiya va telekommunikatsiya sohaslarida ham elektromagnit to'lqinlarning tarqalish tezligi va yo'nalishi haqidagi ma'lumotlar atmosfera sharoitlari va ob-havo parametrlarini aniqlashda qo'llanadi to'lqin tarqalish tenglamasi uchun koeffitsiyentni aniqlashning teskari masalasi nazariy matematikada ham, amaliy fanlarda ham o'ta dolzarb yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Teskari masalalarning murakkabligi ularning yaxshi qo'yilmaganligi bilan bog'liq bo'lsa-da, zamonaviy matematik metodlar, kompyuter texnologiyalari va sonli algoritmlar ushbu masalalarning aniq va ishonchli yechimlarini topishga imkon bermoqda. Kelajakda yanada takomillashgan usullar, xususan, sun'iy intellektga asoslangan inversiya algoritmlarining qo'llanishi bu sohani rivojlantirishda muhim rol o'ynashi kutilmoqda.

XULOSA

Xulosa o'rnida aytish mumkinki, to'lqin tarqalish tenglamasi uchun koeffitsiyentni aniqlashning teskari masalasi matematik fizikaning eng murakkab va amaliy ahamiyati yuqori bo'lgan yo'nalishlaridan biridir. Ushbu masalada tenglama tarkibidagi noma'lum parametrlarni kuzatuv ma'lumotlari yordamida tiklash zarur bo'ladi. Bunday masalalar o'z tabiatiga ko'ra yaxshi qo'yilmagan bo'lib, yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi har doim ham kafolatlanmaydi. Shu sababli teskari masalalarni yechishda qo'shimcha cheklovlar, regulyarizatsiya metodlari, variatsion yondashuvlar va iteratsion algoritmlar qo'llaniladi. To'lqin jarayonlarini modellashtirishda koeffitsiyentni aniqlash masalasi geofizik seysmik o'lchovlardan tortib tibbiy ultratovush diagnostikasigacha, akustika, radiolokatsiya, masofadan zondlash, mexanik konstruksiyalarni tekshirish kabi ko'plab sohalarda amaliy qo'llanilishga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Lavrentyev M. Romanov G. Shishatskiy S.P. Operator usullari yordamida noto'g'ri qo'yilgan masalalarni yechish. Moskva. Nauka 1980-yil.



TANQIDIY NAZAR, TAHLILY TAFAKKUR VA INNOVATSION G'UYALAR



2. Isakov V. Qisman hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalar. Springer. 2006-yil.
3. Kirsch A. Teskari masalalar nazariyasiga kirish. Springer. 2011-yil.
4. Colton D. Kress R. Akustik va elektromagnit to'liqlar uchun teskari masalalar nazariyasi. Springer. 2013-yil.
5. Tikhonov N. Matematik fizikaning noto'g'ri qo'yilgan masalalari haqida. SSSR Fanlar Akademiyasi ishlari. 1943-yil.

