ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN TESKARI MASALA

Axmedova Xayotxon Baxromjon qizi
Farg’ona davlat unversiteti talabasi
E-mail: axmedovahayotxon@95gmail.com
Ibroximova Ozodaxon Muhammadjon qizi
Farg’ona davlat unversiteti talabasi
E-mail: ozodaxonm0@gmail.com

Annotatsiya: *Mazkur maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masalalarning nazariy asoslari va ularni yechish usullari tahlil qilinadi. Teskari masalalarning nokorrektligi, ularni yechishdagi asosiy muammolar, shuningdek, ba’zi amaliy misollar orqali bu masalalarning ahamiyati ko‘rsatib beriladi. Shu bilan birga bir jinsli bo’lmagan issiqlik tarqalish tenglamasining yechish usuli ham ko’rsatib o’tilgan.*

Аннотация: *В данной статье анализируются теоретические основы обратных задач для уравнения теплопередачи и методы их решения. Показана важность обратных задач, основные проблемы при их решении, примеры и некоторые практические работы. При этом также показан метод решения неоднородного уравнения теплопередачи.*

Annotation: *This article analyzes the theoretical foundations of inverse problems for the heat transfer equation and their solution methods. The importance of inverse problems, the main problems in their solution, examples, and some practical works are shown. At the same time, the solution method of the inhomogeneous heat transfer equation is also shown.*

Kalit so‘zlar: *Issiqlik tarqalish tenglamasi, bir jinsli bo’lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi, teskari masala,, nokorrekt, to‘g‘ri qo‘yilganlik, differensial tenglama.*

Ключевые слова: *Уравнение теплопередачи, неоднородное уравнение теплопередачи, обратная задача,, некорректный, корректность, дифференциальное уравнение.*

Keywords: *Heat transfer equation, inhomogeneous heat transfer equation, inverse problem,, incorrect, well-posedness, differential equation.*

Kirish. Issiqlik tarqalishi jarayonlari texnika va tabiatda keng tarqalgan bo‘lib, ularning matematik modeli sifatida giperbolik,parabolik turdagi differensial tenglamalar, xususan, tor tebranish va issiqlik tarqalish tenglamasi xizmat qiladi. Klassik masalalarda boshlang‘ich va chegara shartlari ma’lum bo‘lsa, ularni yechish nisbatan oddiy hisoblanadi. Biroq ko‘plab amaliy vaziyatlarda bu shartlar noma’lum bo‘lib, faqat natijaviy o‘lchovlar mavjud bo‘ladi. Bu holatlarda issiqlik tarqalish tenglamasining teskari masalasi yuzaga keladi.

Teskari masala – bu natijaviy holatdan kelib chiqib, dastlabki shart yoki tizimning o‘zgaruvchan parametrlarini aniqlash muammosidir.

Asosiy qism

To’g’ri Masala. Bizga

$$U_t = a^2 U_{xx} \tag{1}$$

tenglamani va

$$U(x,0)=\varphi(x), 0\le x\le l \tag{2}$$

$$U_x(0,t)=U_x(l,t)=0, 0\le t\le T \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ funksiya topilsin.

Teskari Masala. $t\in[t_0,t_1], t_0>0$ bo’lganda

$$g(t)=U(x_0,t) \tag{4}$$

funksiya berilgan, bu yerda $x_o-[0,l]$ kesmadagi biror fiksrlangan nuqta, $U(x,t)$ esa $(1)-(3)$ masalaning yechimi. $[0,l]$ kesmada $\varphi(x)$ funksiyani topish talab qilinadi.

Bu teskari masalaning fizik talqini quyidagicha. Muayyan vaqt oralig’ida harorat sterjenning belgilangan nuqtasida o’lchanadi va bu o’lchovlardan dastlabki harorat taqsimotini aniqlash kerak.

$(1)-(3)$ masalaning yechimini o’zgaruvchilarni ajratish usuli bilan ya’ni Fure usuli yordamida ishlaymiz.

$$U(x,t)=X(x)\cdot T(t) \tag{5}$$

ko’rinishida yozib olib, (5) tenlamadan dastlab t bo’yicha birinchi tartibli xosila so’ngra x bo’yicha ikkinchi tartibli xosila olib (1) tenglamaga qo’yamiz. Bizda

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

tenglik hosil bo’ladi. Bu tenglik yordamida ikkita tenglam tuzib olamiz. Ular

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{6}$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X_x(0)=X_x(l)=0 \end{cases} \tag{7}$$

Bulardan

$$U(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\exp\left\{-\left[\pi n/l\right]^2a^2t\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

ko’rinishiga ega. Bu tenglikka $x=x_0$ qo’yib, $\varphi(x)$ fuksiya uchun

$$\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\exp\left\{-\left[\pi n/l\right]^2a^2t\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)=g(t)$$

tenglama hosil bo’ladi. Bu yerda $t\in[t_0,t_1]$.

O’lchov nuqtasi x_o segment oxirida bo’lgan taqdirda (1) tenglama yechimining yagonaligini tekshiramiz. Yagonaligini aniqlash uchun bizga teorema yordam beradi.

Teorema. Agar $x_o=0$ bo’lsa, (1) tenglamaning yechimi $L_2\left[0,l\right]$ fazoda yagona bo’ladi.

Isbot. (1) tenglamaning chiziqliligidan kelib chiqadiki, $L_2[0,l]$ fazoda yechimning yagonaligini isbotlash uchun $g(t)=0$ bo’lganda faqat nolga teng yechimga ega ekanligini ko’rishimiz mumkin.

Issiqlik tarqalish tenglamasiga misol

Misol. Keling, bir jinsli bo’lmagan issiqlik tarqalish tenglamasini ko’rib chiqaylik

$$U_t+t^nU_{xx}+t^nU=0\,,\, n=N \qquad (1)$$

tenglama hamda

$$U(x,0)=\varphi(x) \qquad (2)$$

$$U(0,t)=U(l,t)=0 \qquad (3)$$

$$g(t)=U(x_0,t) \qquad (4)$$

boshlang’ich va chegaraviy shartlar berilgan bo’lsa, $U(x,t)$, $\varphi(x)$ va $g(t)$ funksiyalar topilsin.

$(1)-(3)$ masalaning yechimini o’zgaruvchilarni ajratish usuli bilan ya’ni Fure usuli yordamida ishlaymiz.

$$U(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad (5)$$

ko’rinishida yozib olib, (5) tenlamadan dastlab t bo’yicha birinchi tartibli xosila so’ngra x bo’yicha ikkinchi tartibli xosila olib (1) tenglamaga qo’yamiz. Bizda

$$\frac{T'(t)}{t^nT(t)}+1=-\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$$

tenglik hosil bo’ladi. Bu tenglikdan quyidagi tenglamalarni yozish mumkin.

$$T'(t)+t^nT(t)-\lambda t^nT(t)=0 \qquad (6)$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \qquad (7)$$

(7) tenglamaning yechimi

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right),\ \sqrt{\lambda_k}=\frac{k\pi}{l}$$

ko’rinishga ega bo’ladi. (6) tenglamaning yechimi esa

$$T_k(t)=C_ke^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(1-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)}.$$

Demak, $U(x,t)$ funksiya

$$U_k(x,t)=C_k\sqrt{\frac{2}{l}}e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(1-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

ko’rinishga keladi. Endi (2) shartni bo’ysundiramiz.

$U(x,0)=C_k\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)=\varphi(x)$ bundan C_k quydagi ko’rinishga ega bo’ladi,

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx$$

(4) shartdan foydalanib esa $g(t)$ funksiyani topamiz.

$$g(t) = C_k \sqrt{\frac{2}{l}} e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(1-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x_0\right)$$

Xulosa qilib aytadigan bo’lsak bu tenglamaning yechimi mavjud lekin turg’un emas. Shu sababli bu masala korrekt emas.

Xulosa

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masalalar nazariy va amaliy jihatdan juda muhimdir. Ularning nokorrektligi sababli an’anaviy yechim yondashuvlari yetarli emas, shuning uchun regulyarizatsiya kabi zamonaviy metodlardan foydalanish zarur. Teskari masalalarni chuqur o‘rganish va samarali algoritmlar ishlab chiqish turli fan va texnika sohalarida dolzarb hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. “Solutions of Ill-posed Problems.” Winston & Sons, 1977.

2. Lavrent'ev M.M. va boshqalar. “Teskari masalalar nazariyasi.” Fan, 1980.

3. Özisik M.N., Orlande H.R.B. “Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications.” Taylor & Francis, 2000.

4. Kabanikhin S.I. “Definitions and examples of inverse and ill-posed problems.” J. Inverse and Ill-posed Problems, 2011.