ANIQ INTEGRALLAR YORDAMIDA HISOBLASH METODI TAXLILI

Norboyeva Dildora Berdiboyevna
Toshkent iqtisodiyot va sanoat texnikumi o‘qituvchisi

Annatatsiya. *ushbu maqolada oliy ta’lim muassasalari talabalariga aniq integral ta’rifi mavzusiga oid misollarning yechimlari va ularni taxlil qilish metodlari ko‘rib chiqilgan.*

Kalit so‘zlar: *aniq integral, aniq integral ta’rifi, integral yig‘indi, oraliqni bo‘laklarga bo‘lish, bo‘lak uzunliklari*

Aniq integralning ta’rifi va uning geometrik ma’nosi.. [a,b] kesmada uzluksiz f(x) funksiya berilgan bo‘lsin. Kesmani bo‘laklarga bo‘lamiz va, har bir bo‘lakda bittadan nuqtalar tanlaymiz ya’ni ξ_k nuqtani tanlab. Bu nuqtalarda funksiya qiymatlarini hisoblab, har bir bo‘laklash uzunligini shu nuqtadagi funksiyaning qiymatiga ko‘paytiramiz va $\sum_k^n f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ yig‘indisini tuzamiz.

Bu yig‘indiga funksiya uchun kesmadagi integral yig‘indi deyiladi.

Ta’rif. integral yig‘indining kesmaning bo‘linish usuliga va ularda nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ dagi chekli limiti

mavjud bo‘lsa, bu limitga funksiyaning kesmadagi aniq integrali deyiladi va

$I=\int_a^b f(x)\,dx$ simvol bilan belgilanadi.

Oliy ta’lim muassasalarida odatda ushbu integral ta’rifini o‘rgatish bilan chaklanish ta’lim muassasalari talabalari bilim ko‘nikmalarida tushunmovchiliklar paydo bo‘lishiga olib kelishi mumkin. Masalan yuqoridagi ta’rif aniq integral uchun bir muncha osonlashtirilgan ta’rif bo‘lib, ushbu ta’rifni o‘qigan talaba aniq integral tushunchasi to‘g‘risida bir qancha ma’lumot va ko‘nikmalarga ega bo‘lishlari mumkin, ammo matematik analizdan yozilgan bir nechta darsliklar borki ularda aniq integrallar mavzusi mukkammal yoritilgandir. Lekin talabalar tushunib yetishlari uchun bir oz vaqt talab qiladi. Masalan T.Azlarov, H.Mansurovlarning “Matematik analiz” nomli matematik analizdan yozilgan ma’ruzalar to‘plamida aniq integrallar mavzusi quyidagicha yoritilgan.

Integral yig‘indi. [a,b] segmentda f(x) funksiya aniqlangan bo‘lsin, [a,b] segmentni $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots\ldots.x_k,\ldots\ldots.x_n\}\in P$ bo‘laklashni va bu bo‘laklashning har bir $[x_k,x_{n+1}]$ $(\mathrm{k}=0{,}1{,}2\ldots.\mathrm{n}-1)$ oraliqda ixtiyoriy

$\xi_k(\xi_k\in x_k,x_{n+1}$ uqta olamiz. Berilgan funksiyaning ξ_k nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ ga ko‘paytirib , quyidagi yig‘indi tuzamiz:

$$\sigma=f(\xi_0)\Delta x_0+(\xi_0)\Delta x_1+\ldots\ldots\ldots f(\xi_k)\Delta x_k+\ldots\ldots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$$

Ta’rif. Ushbu $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ yig‘indi f(x) funksiyaning integral yig‘indi deb ataladi. Masalan, 1) f(x)=x funksiyaning [a,b] segmentdagi integral yig‘indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

Bo‘ladi, bunda $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} (k = 0,1,2, \dots n-1)$

Ravshanki, f(x) funksiyaning integral yig‘indisi $\sigma f(x)$ funksiyaga, [a,b] segmentni bo‘laklash usullariga hamda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentdan olingan ξ_k nuqtalarga bog‘liq bo‘ladi.

Aniq integral ta’rifi. f(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan bo‘lsin. [a,b] segmentning shunday $P_1, P_2, P_3 \dots . P_m \quad P_m \in P)$ bo‘laklarni qaraymizki, ularning mos diametrlaridan tashkil topgan $\lambda_{P1}, \lambda_{P2}, \lambda_{P3} \dots . \lambda_{Pm}$ ketmaketlik nolga intilsin: $\lambda_{Pm} \to 0$.

Bunday P_m (m=1,2,3,…….) bo‘laklashlarga nisbatan f(x) funksiyaning integral yig‘indilarini tuzamiz. Natijada [a,b] segmentni P_m bo‘laklashlarga mos f(x) funksiyaning integral yig‘indilari qiymatlaridan iborat qo‘yiladi.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots . \sigma_m$ ketma-ketlik hosil bo‘ladi. Ravshanki, bu ketma-ketlikning har bir hadi ξ_k nuqtalarga bog‘liqdir.

Ta’rif. Agar [a,b] segmentni har qanday bo‘laklashlar ketma-ketligi $\{P_m\}$ olinganda ham unga mos integrallar yig‘indi qiymatlaridan iborat $\{\sigma_m\}$ ketma-ketlik ξ_k nuqtalarning tanlab olinishiga bog‘liq bo‘lmagan holda hamma vaqt bitta I soniga initilsa, bu I soniga σ yig‘indining $\lambda_{Pm} \to 0$ dagi limiti deyiladi. U $\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \sum_{k=0}^{n=1} f(\xi_k)\Delta x_k = 1$ kabi belgilanadi.

1-misol. $\int_0^1 e^x dx$ aniq integralni ta’rif yordamida isbotlang.

Javob: aniq integral berilgan oraliqni yuqoridagi kabi n teng bo‘laklarga bo‘lamiz $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \dots . \left[\frac{n-1}{n}, \frac{1n}{n}\right]$ va har bir bo‘lakning yuqori chegarasini $\xi_k = \frac{k}{n}$ kabi belgilaymiz va bo‘laklarning uzunligini $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ bilan belgilab quyidagi yig‘indini tuzamiz. $\sum_{k-1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}}$ ushbu yi’gindini barcha hadini yoyib yozib,

$$\sum_{k-1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots e^{\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(1 - e^{\frac{n}{n}}\right)}{1 - e^{\frac{1}{n}}} =$$

qatorning yig‘indisini geometric progressiya yigindisidan topamiz va ikkinchi ajoyib limitning natijasidan foydalanib quyidagi limitni hisoblaymiz.

$$= \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(1 - e^{\frac{n}{n}}\right)}{\frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - e}{-1} = e - 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan berilgan aniq integral $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ ning qiymati ekanligi kelib chiqadi.

Xulosa o'rnida shuni aytish mumkinki, yuqoridagi taxlillardan ko'rinadiki, aytib o'tganimizdek aniq integrallar ta'rifini o'qib chiqib taxlil qilish orqali kerakli natijaga erishib bo'lmaydi shuning uchun nafaqat oliy ta'lim muassasalari talabalariga balki har bir fanni o'rganuvchi o'quvchilarga ta'rif va teoremalarni o'rgatishda misollardagi tadbiqlari orqali o'rgatish samarali natijaga erishishga sabab bo'ladi. Shuning uchun aniq integral ta'rifini o'quvchilarga tushuntirishda nafaqat chiziqli, darajali va ko'rsatkichli funksiyalar yordamida balki boshqa trigonometrik, teskari trigonometrik funksiyalar yordamida ham tushuntirish orqali dars samaradorliligini va talabalarning fanga bo'lgan qiziqishlarini oshirish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. T.Azlarov, H.Mansurovlarning "Matematik analiz" o'quv qo'llanmasi.
2. A.Gaziyev, I isroilov, M.Yaxshiboyev "Matematik analizdan misol va masalalar" o'quv qo'llanmasi
3. A.Sa'dullayev, X.Mansurov, G.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G'ulomov. matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami I qism. 1995-y Toshkent