



OQIMLAR NAZARIYASINING MATEMATIK ASOSLARI

Sodiqova Vazira Yaxyoqul qizi

*O'zbekiston Milliy universiteti, Jizzax filiali Amaliy matematika
yo'nalishi magistranti*

Kirish

Graflar nazariyasi zamonaviy diskret matematikaning eng jadal rivojlanayotgan sohalaridan biri bo'lib, u nafaqat nazariy ahamiyatga, balki amaliy qo'llanmalarga ham ega. Ushbu sohaning muhim yo'nalishlaridan biri — tarmoq oqimlari (network flows) nazariyasidir. Tarmoq oqimlari nazariyasi transport tizimlari, aloqa tarmoqlari, energiya taqsimoti, moliyaviy oqimlar va logistika masalalarini matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi. Ushbu tezisda oqimlar nazariyasining asosiy matematik tushunchalari, maksimal oqim va minimal kesim teoremasi hamda Ford–Fulkerson algoritmi ko'rib chiqiladi.

Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, real hayotdagi ko'plab optimallashtirish masalalari — masalan, transport yo'llarini rejalashtirish, internet tarmog'idagi ma'lumotlar oqimini boshqarish yoki ishlab chiqarish jarayonlarini modellashtirish — tarmoq grafida oqim masalasiga keltiriladi. Shu sababli oqimlar nazariyasining matematik asoslarini chuqur o'rganish muhim ahamiyatga ega.

Asosiy tushunchalar va ta'riflar

Yo'naltirilgan graf $G = (V, E)$ berilgan bo'lsin, bu yerda V — uchlar (tugunlar) to'plami, E — yo'naltirilgan qirralar (yoylar) to'plami. Grafda ikkita alohida uchi ajratiladi: manba (source) s va oqim tushadigan uchi (sink) t . Har bir $(u, v) \in E$ qirraga o'tkazuvchanlik funksiyasi $c(u, v) \geq 0$ mos qo'yiladi, bu qirra orqali o'tishi mumkin bo'lgan oqimning yuqori chegarasini bildiradi.

Oqim deb $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyasiga aytiladi, agar quyidagi uchta shart bajarilsa:

- 1) Sig'im cheklovi: har qanday $(u, v) \in E$ uchun $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$;
- 2) Antisimmetriklik: $f(u, v) = -f(v, u)$;
- 3) Oqimning saqlanish qonuni: manba va oqim tushadigan uch bundan mustasno, har bir $v \in V \setminus \{s, t\}$ uchun kiruvchi oqimlar yig'indisi chiquvchi oqimlar yig'indisiga teng, ya'ni $\sum f(u, v) = 0$.

Oqimning kattaligi $|f|$ deb manbadan chiqadigan natijaviy oqim miqdoriga aytiladi: $|f| = \sum f(s, v)$, bu yerda yig'indi barcha $v \in V$ bo'yicha olinadi. Masalaning maqsadi — berilgan tarmoqda s dan t gacha bo'lgan maksimal qiymatga ega oqimni topishdan iborat.

Kesim tushunchasi va zaif ikkilanish (weak duality)

Tarmoqning (s, t) -kesimi deb V to'plamini ikkita qism to'plamga — S va $T = V \setminus S$ ga, $s \in S$ va $t \in T$ shartini qanoatlantiradigan bo'linishga aytiladi. Kesimning sig'imi $c(S, T)$ quyidagicha aniqlanadi: $c(S, T) = \sum c(u, v)$, bu yerda yig'indi $u \in S$ va $v \in T$ bo'lgan barcha qirralar bo'yicha olinadi.



Muhim natija shundan iboratki, ixtiyoriy oqim f va ixtiyoriy (s, t) -kesim (S, T) uchun quyidagi tengsizlik o'rinli: $|f| \leq c(S, T)$. Bu zaif ikkilanish tamoyili deb ataladi va u maksimal oqim qiymati har qanday kesim sig'imidan katta bo'la olmasligini ko'rsatadi. Bu tamoyil maksimal oqim–minimal kesim teoremasining asosiy poydevorini tashkil etadi.

Maksimal oqim – minimal kesim teoremasi

L. Ford va D. Fulkerson tomonidan 1956-yilda isbotlangan maksimal oqim–minimal kesim teoremasi (Max-flow min-cut theorem) oqimlar nazariyasining markaziy natijasi hisoblanadi. Teorema quyidagicha ta'riflanadi: tarmoqdagi maksimal oqimning qiymati shu tarmoqdagi minimal kesimning sig'imiga teng.

Teoremaning isboti quyidagi mulohazaga asoslanadi: agar f oqim maksimal bo'lsa, u holda qoldiq graf G_f da s dan t gacha kengaytiruvchi yo'l (augmenting path) mavjud bo'lmaydi. Bu holda S to'plamini G_f da s dan yetib boriladigan uchlar to'plami sifatida aniqlab, $T = V \setminus S$ deb olinsa, (S, T) kesimi to'yingan bo'ladi, ya'ni S dan T ga yo'naltirilgan barcha qirralar to'liq sig'imda ishlatiladi, T dan S ga esa hech qanday oqim o'tmaydi. Natijada $|f| = c(S, T)$ tenglik hosil bo'ladi, bu esa f oqimi minimal kesim sig'imiga teng ekanligini, demak u maksimal ekanligini isbotlaydi.

Ushbu teorema nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki ko'plab kombinatorika masalalarini — masalan, ikki qismli graflarda maksimal moslashtirish (bipartite matching) masalasini — yechishda ham asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi.

Ford–Fulkerson algoritmi

Ford–Fulkerson algoritmi maksimal oqimni topishning konstruktiv usulini taqdim etadi. Algoritm quyidagi bosqichlardan iborat:

- 1) Boshlang'ich oqim f nolga tenglashtiriladi;
- 2) Qoldiq graf G_f quriladi, unda har bir (u, v) qirrasi uchun qoldiq sig'im $cf(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ hisoblanadi;
- 3) G_f da s dan t gacha kengaytiruvchi yo'l qidiriladi (masalan, kenglik bo'yicha qidiruv — Edmonds–Karp modifikatsiyasida);
- 4) Agar bunday yo'l topilsa, uning bo'yicha minimal qoldiq sig'imga teng miqdorda oqim qo'shiladi va 2-bosqichga qaytiladi;
- 5) Agar kengaytiruvchi yo'l topilmasa, algoritm to'xtaydi va joriy oqim maksimal oqim hisoblanadi.

Agar qirralarning sig'implari butun sonlar bo'lsa, algoritm chekli qadamda tugaydi, chunki har bir qadamda oqim qiymati kamida 1 birlikka ortadi. Biroq oddiy Ford–Fulkerson algoritmining ishlash vaqti sig'implarning qiymatlariga bog'liq bo'lishi mumkin, shu sababli Edmonds–Karp algoritmi (kengaytiruvchi yo'l sifatida eng qisqa yo'l tanlanadi) va Dinitsning blokirovka oqimlar usuli kabi polinomial vaqt murakkabligiga ega modifikatsiyalar ishlab chiqilgan.

Amaliy qo'llanilishi

Oqimlar nazariyasi quyidagi sohalarida keng qo'llaniladi:

— transport va logistika tizimlarida yuk tashish marshrutlarini optimallashtirish;



- telekommunikatsiya tarmoqlarida ma'lumotlar oqimini taqsimlash va tarmoq bandligini boshqarish;
- ishlab chiqarish jarayonlarini rejalashtirishda resurslarni taqsimlash;
- ikki qismli graflarda ishchilarni lavozimlarga yoki talabalarni guruhlariga optimal taqsimlash (assignment problem);
- tarmoq ishonchliligini baholash va zaif bo'g'inlarni (minimal kesimlarni) aniqlash.

Bundan tashqari, maksimal oqim–minimal kesim teoremasi chiziqli programmashtirishning ikkilanish nazariyasi (duality theory) bilan chambarchas bog'liq bo'lib, u ikkilangan chiziqli dasturlash masalasining xususiy holati sifatida qaraladi. Bu bog'liqlik oqimlar nazariyasini optimallashtirish nazariyasining umumiy matematik apparatiga integratsiya qilish imkonini beradi.

Xulosa

Ushbu tezisda tarmoq oqimlari nazariyasining matematik asoslari, jumladan, oqim va kesim tushunchalari, zaif ikkilanish tamoyili, maksimal oqim–minimal kesim teoremasi va Ford–Fulkerson algoritmi ko'rib chiqildi. Ko'rsatilganidek, ushbu nazariya nafaqat chuqur matematik mazmunga, balki keng amaliy qo'llanilish doirasiga ega. Kelgusi tadqiqotlarda ushbu nazariyaning ko'p mahsulotli oqimlar (multi-commodity flow) va dinamik tarmoqlardagi oqimlar kabi umumlashmalarini o'rganish dolzarb yo'nalish bo'lib qolmoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ford L.R., Fulkerson D.R. Flows in Networks. — Princeton University Press, 1962.
2. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to Algorithms. — 3rd ed. — MIT Press, 2009.
3. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. — Prentice Hall, 1993.
4. Diestel R. Graph Theory. — 5th ed. — Springer, 2017.