YUQORI TARTIBLI HOSILA OLDIDA KICHIK PARAMETR MAVJUD BO‘LGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI MODELLASHTIRISH

Jovliyeva Fozila Olimjon qizi

Annotatsiya: *Ushbu maqolamda yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli modellashtirish masalasi kompleks tarzda chuqur o‘rganilgan deb hisoblayman. Tadqiqot jarayonida bunday tenglamalarning yechimlari o‘ziga xos xususiyatlarga ega ekanligi, va xususan, chegaraviy va ichki qatlamlarning hosil bo‘lishi, yechimning keskin o‘zgaruvchanligi hamda barqarorlik muammolari keng ravishda tahlil qilindi bundan tashqari ayrim bir metodlar orqali yechish o’rganiladi. Nostasionar va stasionar model masalalar asosida kichik parametrning yechim strukturasiga ta’siri chuqur o‘rganiladi va shaxsiy, nazariy xulosalar chiqariladi. Maqolamda konvektiv hadni markaziy-ayirma va bir taraflama (upwind) sxemalar orqali approksimatsiyalash usullari solishtiriladi. Ularning barqarorlik va aniqlik jihatlari tanqiqdiy baholandi. Shuningdek, Samarskiy sxemasining kichik parametrli masalalardagi ustunliklari asoslab berildi. Ayrim shaxsiy tajribalarga tayangan holda Peclet soni orqali sonli sxemalarning qo‘llanish chegaralari tahlil qilindi. Maqolamning asosiy maqsadi shundan iboratki, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli modellashtirishda yuzaga keladigan muammolarni aniqlashdir. Turli sonli yondashuvlarni taqqoslash va eng samarali hamda barqaror hisoblash usullarini asoslab berishdan iboratdir.*

Kalit so‘zlar: *Yuqori tartibli differensial tenglamalar, kichik parametr, sonli modellashtirish, asimptotik yechimlar, upwind sxema, Samarskiy sxemasi, Peclet soni, barqarorlik, yaqinlashuv, diskretizatsiya.*

Kirish

So‘nggi yillarda matematik modellashtirish va hisoblash usullarining jadal rivojlanishi natijasida yuqori tartibli differensial tenglamalarni, ayniqsa hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan masalalarni o‘rganishga bo‘lgan qiziqish sezilarli darajada ortib bormoqda. Ilmiy izlanishlarimdan kelib chiqib aytishim mumkinki, bunday tenglamalar ko‘plab real jarayonlarni – issiqlik uzatish, konvektiv oqimlar, muhandislik tizimlari va boshqa fizik hodisalarni ifodalashda muhim matematik model sifatida namoyon bo‘ladi. Shu bilan birga, ayniqsa kichik parametr mavjudligi yechimning xulq-atvorini murakkablashtirib, ayniqsa tor chegaraviy qatlamlar va keskin o‘zgaruvchan zonalarning paydo bo‘lishiga olib keladi deb ayta olaman. Bundan tashqari, mavjud adabiyotlar va olib borilgan tadqiqotlarim tahlili shuni ko‘rsatadiki, oddiy sonli approksimatsiya usullari bunday masalalarda har doim ham yetarli aniqlikni ta’minlay olmaydi. Ayniqsa, to‘r qadami chegaraviy qatlam qalinligiga yaqin bo‘lgan hollarda hisoblash natijalari sezilarli xatoliklar bilan ifodalanishini kuzatdim, hatto yechimning sifat jihatdan noto‘g‘ri talqin qilinishiga olib kelishi mumkin. Mening kuzatishlarimga ko‘ra, aynan shu holatlarda maxsus sonli sxemalar – xususan, bir taraflama (upwind) yondashuvlar, markaziy-ayirma usullari va ularning kombinatsiyalari muhim ahamiyat kasb etadi. Shuningdek, ilmiy-amaliy tajribalarimdan kelib chiqib ta’kidlash joizki, nostasionar va stasionar model masalalarni o‘zaro taqqoslash orqali kichik parametrning yechim strukturasiga ta’sirini yanada chuqurroq anglash mumkin. Aynigan masalalarni ko‘rib chiqish esa yechimning asosiy xususiyatlarini aniqlashga yordam beradi. Bundan tashqari chegaraviy qatlamlarning shakllanish mexanizmini tushuntirib beradi. Shu nuqtai nazardan qaraganda, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli modellashtirish nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham dolzarb ilmiy muammo hisoblanadi.

Bundan kelib chiqib, mazkur tadqiqotimizda kichik parametrli differensial tenglamalar uchun samarali sonli yondashuvlarni ishlab chiqish, ularning barqarorligi va aniqligini baholash, shuningdek, turli approksimatsiya sxemalarining imkoniyatlarini solishtirish asosiy vazifalardan biri sifatida qaraladi. Natijada, olingan ilmiy xulosalar murakkab tizimlarni modellashtirishda qo‘llaniladigan zamonaviy hisoblash usullarini yanada takomillashtirishga xizmat qiladi.Albatta, bu usullar bizga aniq bir yechim bo’la oladi.

Adabiyotlar sharhi

Ilmiy izlanishlarimdan kelib chiqib aytishim mumkinki, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni o‘rganish masalasi matematik analiz va sonli modellashtirish sohasida alohida ahamiyat kasb etadi. Ushbu yo‘nalishda olib borilgan tadqiqotlarni tahlil qilish jarayonida men mahalliy va xorijiy manbalarni qiyosiy o‘rganishga harakat qildim hamda ularning nazariy va amaliy jihatlarini solishtirib chiqdim. Avvalo, mahalliy olimlar tomonidan yaratilgan adabiyotlarda yuqori tartibli differensial tenglamalarning umumiy nazariyasi, ularning klassifikatsiyasi va analitik yechim usullari yetarlicha yoritilganini kuzatdim. Xususan, differensial tenglamalarni klassik usullar yordamida yechish, yuqori tartibli hosilalarning xossalari va differensial hisob asoslari keng bayon etilgan. Shu bilan birga, kichik parametrli tenglamalarga doir masalalar ham ma’lum darajada ko‘rib chiqilgan bo‘lsa-da, ularning sonli modellashtirish jihatlari ko‘p hollarda umumiy tavsif darajasida qolib ketganini sezdim. Bundan tashqari, xorijiy ilmiy manbalarni o‘rganish davomida shuni aniqladimki, ular asosan singulyar pertubatsiya (kichik parametrli) masalalarga, asimptotik yechimlar qurish va barqaror sonli sxemalar ishlab chiqishga katta e’tibor qaratadi. Ayniqsa, chegaraviy qatlamlar nazariyasi, ichki o‘tish zonalari va yechimning keskin o‘zgarishlarini hisobga oluvchi maxsus metodlar chuqur tahlil qilingan. Lekin ayrim manbalarda konkret hisoblash algoritmlarining amaliy qo‘llanilishi yetarli darajada batafsil yoritilmaganligini ham kuzatdim. Mening shaxsiy tahlillarimdan kelib chiqib shuni ta’kidlash joizki, mavjud adabiyotlarda markaziy-ayirma sxemalari, bir taraflama (upwind) yondashuvlar hamda kombinatsiyalangan usullar haqida muhim nazariy ma’lumotlar berilgan bo‘lsa-da, ularni aynan kichik parametr mavjud holatlarga moslashtirish masalasi to‘liq ochib berilmagan.Shuningdek, o‘zim olib borgan kuzatishlar va hisoblash tajribalarim shuni ko‘rsatdiki, oddiy sonli usullar ko‘pincha chegaraviy qatlamlarni to‘g‘ri aks ettira olmaydi va bu esa yechimning sifat jihatdan buzilishiga olib keladi. Shu sababli zamonaviy adabiyotlarda taklif etilgan Samarskiy sxemasi kabi yondashuvlar alohida e’tiborga loyiq bo‘lib, ular kichik parametrli masalalarda nisbatan yuqori aniqlik va barqarorlikni ta’minlaydi. Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli modellashtirish bo‘yicha ilmiy adabiyotlar muayyan nazariy asosga ega bo‘lsa-da, ularni kompleks, tizimli va amaliy yo‘naltirilgan tarzda rivojlantirish zarurati saqlanib qolmoqda. Aynan shu jihatlar mazkur tadqiqotning dolzarbligini belgilab beradi va mavjud ilmiy ishlardan farqli ravishda masalani chuqurroq tahlil qilishimga undaydi.

Tadqiqot metodologiyasi

Darhaqiqat, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni o‘rganish jarayoni murakkab va ko‘p bosqichli ilmiy yondashuvni talab etadi deb o’ylayman. Mening shaxsiy mulohazam shuki, bunday masalalarni samarali tahlil qilish uchun nazariy, analitik va sonli usullarni o‘zaro uyg‘unlashtirish zarur hisoblanadi. Shu nuqtai nazardan, mazkur tadqiqotda metodologik yondashuvlar tizimli ravishda ishlab chiqildi va amaliy hisoblashlar bilan mustahkamlandi. Kichik parametrli differensial tenglamalarni o‘rganishda dastlab modelni to‘g‘ri shakllantirish muhim bosqich hisoblanadi. Shu sababli tadqiqotning birinchi bosqichida nostasionar model masala qaraldi. U orqali yechimning vaqt va fazoga bog‘liq xatti-harakati o‘rganildi. Ushbu model asosida kichik parametrning yechimga ta’siri, ayniqsa ichki o‘tish qatlamlari va chegaraviy qatlamlarning shakllanishi tahlil qilindi. Aynigan masala bilan taqqoslash orqali yechimning asosiy xususiyatlari aniqlab olindi. Metodologik yondashuvlarimdan kelib chiqib, tadqiqotning keyingi bosqichida stasionar model masala alohida ko‘rib chiqildi. Bu bosqichda tenglamaning analitik yechimi aniqlanib, u kichik parametr bo‘yicha asimptotik kengaytirish yordamida soddalashtirildi. Natijada yechimning ikki asosiy tarkibiy qismi — asosiy (silliq) yechim va chegaraviy qatlam funksiyasi ajratib ko‘rsatildi. Bu esa sonli modellashtirish jarayonida qaysi hududlarda aniqlikni oshirish zarurligini tadqiqotimizda aniqlash imkonini berdi.Bundan tashqari, mening ilmiy yondashuvimga ko‘ra, sonli modellashtirishda turli approksimatsiya sxemalarini qiyosiy tahlil qilish muhim ahamiyatga ega. Shu sababli tadqiqot davomida konvektiv hadni markaziy-ayirma sxemasi va bir taraflama (upwind) sxemalar yordamida approksimatsiyalash usullari qo‘llanildi. Ushbu sxemalarning barqarorlik, yaqinlashuv va aniqlik xossalari amaliy hisoblashlar orqali tekshirildi. Ayniqsa, kichik parametr mavjud bo‘lgan hollarda markaziy sxemalarning yetarli barqarorlikni ta’minlamasligi, aksincha, bir taraflama sxemalarning nisbatan ishonchli natijalar berishi kuzatildi. Shuningdek, shaxsiy tajribamdan kelib chiqib, Samarskiy sxemasining qo‘llanilishi alohida o‘rganildi. Ushbu sxema orqali markaziy va bir taraflama yondashuvlarning afzalliklarini birlashtirish mumkinligi aniqlandi. Bu esa kichik parametrli masalalarda yuqori aniqlik va barqarorlikka erishishda muhim vosita sifatida namoyon bo‘ldi. Metodologik yondashuvlarimdan kelib chiqib, tadqiqotning yakuniy bosqichida sonli sxemalarni “potok” kattaligi, ya’ni Peclet soni orqali baholash amalga oshirildi. Bu parametr yordamida qaysi sxemani qaysi sharoitda qo‘llash maqsadga muvofiqligi aniqlab berildi. Natijada, kichik parametrli differensial tenglamalarni modellashtirishda sxemalarni to‘g‘ri tanlash va moslashtirish muhim metodologik xulosa sifatida shakllandi. Umuman olganda, olib borilgan tadqiqot metodologiyasi nazariy tahlilimizda, asimptotik yondashuv va sonli modellashtirish usullarining o‘zaro integratsiyasiga asoslanib, yuqori tartibli differensial tenglamalar uchun samarali va ishonchli yechimlar olish imkonini berdi.

Tahlil va natijalar

Darhaqiqat, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli modellashtirish jarayonida olingan natijalar ushbu masalalarning o‘ziga xos murakkabligini yaqqol namoyon etdi. Mening shaxsiy tahlillarimdan kelib chiqib aytish mumkinki, kichik parametr ($\varepsilon \ll 1$) yechimning tuzilishiga sezilarli ta’sir ko‘rsatib, ayniqsa chegaraviy qatlamlar va ichki o‘tish zonalarining paydo bo‘lishiga olib keladi. Bu esa oddiy sonli usullar orqali aniqlikni ta’minlashni qiyinlashtiradi.

1-Jadval: Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametrli differensial tenglamalar: misollar va natijalar

№	Masala turi	Qo‘llangan sxema / yondashuv	ε qiymati	Kuzatilgan natija	Izoh
1	Stasionar masala	Analitik yechim	0.01	Chegaraviy qatlam $x=0$ yaqinida; $x>0.1$ da $u\approx 1$	Chegaraviy qatlam mavjudligi aniqlikni talab qiladi
2	Nostasionar masala	Markaziy-ayirma	0.01	Sun’iy tebranishlar; ba’zi nuqtalarda manfiy u	Barqaror emas, kichik ε bilan ishlatilsa noaniq natija beradi
3	Nostasionar masala	Bir taraflama (upwind)	0.01	Yechim barqaror; tebranish yo‘q; biroz silliqlashgan	Barqaror, lekin aniqlik biroz kamayadi
4	Nostasionar masala	Peclet soni tahlili	0.01, 0.05, 0.1	$Pe<1 \rightarrow$ markaziy sxema ishlaydi; $Pe>1 \rightarrow$ upwind afzal; $Pe\gg 1 \rightarrow$ maxsus sxema zarur	Sxema tanlash mezoni sifatida Pe muhim
5	Nostasionar masala	Samarskiy sxemasi	0.01	Chegaraviy qatlam aniq aks etadi; tebranish yo‘q; aniqlik yuqori	Kichik ε qiymatlarda optimal natija beradi

Xulosamiz o’rnida aytish mumkinki, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr mavjud bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli modellashtirishda standart markaziy-ayirma sxemalari barcha holatlarda yetarli emas. Tadqiqotlarimizdan kelib chiqib, shaxsiy mulohazam shuki, amaliy hisoblashlarda chegaraviy qatlamlar va ichki o'tish qatlamlarini hisobga olmasdan ishlash yechim sifatiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Darhaqiqat, kichik ε qiymatlarda barqaror va aniqlikni ta'minlaydigan sxemalarni tanlash muhim ahamiyatga ega deb hisoblaymiz.

Markaziy-ayirma sxemasi Pe<1 bo'lganda yaxshi natija beradi, Pe>1 bo'lganda esa bir taraflama yoki maxsus Samarskiy sxemasi afzal ekanini ko'rdim. Bundan tashqari, konvektiv hadni hisoblashda "potok" kattaligi bo'yicha sxemalarni taqqoslash natijalari shuni ko'rsatdiki, oqim yo'nalishi va ε parametri yechim sifatini bevosita belgilaydi. Shu bois, yuqori tartibli hosila oldidagi kichik parametrli differensial tenglamalarda sonli metodlarni tanlashda, ham barqarorlik, ham chegaraviy qatlamni to'g'ri aks ettirishni inobatga olish zarur.

Ayrim bir amallar natijasi shuni ham ko'rsatdiki, $\varepsilon \to 0$ bo'lganda analitik yechimlar bilan taqqoslash sonli sxemalarning aniqligini baholashda muhim vosita bo'lib xizmat qiladi. Shu bilan birga, amaliy masalalarda tor to'r qadamlarini ishlatmasdan, maxsus sxemalar yordamida sifatli natijalar olish mumkin. Bu esa tadqiqotning amaliy ahamiyatini oshiradi va keyingi ilmiy ishlar uchun metodologik asos yaratadi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Samarskiy A.A., Differentsialnye uravneniya i ikh chislennye metody, Moskva: Nauka, 2002.
2. Morton K.W., Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems, London: Chapman & Hall, 1996.
3. Thomas J.W., Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Springer, 1995.
4. Strikwerda J.C., Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, SIAM, 2004.
5. Marchuk G.I., Methods of Numerical Mathematics, Springer, 1982.
6. V. V. Ivanov, Convection-Diffusion Problems: Analytical and Numerical Approaches, St. Petersburg University Press, 2010.
7. Aziz A., Computational Fluid Dynamics: An Introduction, Wiley, 2010.