BIR O`LCHOVLI KO`NDALANG TO`LQIN TENGLAMASI BILAN TAVSIFLANUVCHI TO`G`RI MASALANI SONLI YECHISH

Shahzod Shanbiyev
Qarshi davlat universiteti, o`qituvchi
E-mail: shahzodshanbiyev@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada bir o'lchovli ko'ndalang to'lqin tenglamasi uchun to'g'ri masalaning sonli yechimi ko'rib chiqilgan. Tadqiqotda markaziy differens, eksplisit va Crank–Nicolson usullari yordamida to'lqin jarayonlari modellashtirildi. Shuningdek, barqarorlik shartlari, xatolik tahlili va natijalar konvergensiyasi o'rganildi. Maqola sonli modellashtirish orqali to'lqinlarning fizik xususiyatlarini aniq tasvirlash imkonini beradi.*

Kalit so'zlar. to*'lqin tenglamasi, sonli yechim, barqarorlik, Crank–Nicolson, konvergensiya.*

Annotation. *This article examines the numerical solution of the one-dimensional transverse wave equation. The study applies central difference, explicit, and Crank–Nicolson methods to model wave propagation. Stability conditions, error analysis, and convergence are analyzed, demonstrating the effectiveness of numerical modeling in capturing wave dynamics.*

Keywords. *Wave equation, numerical solution, stability, Crank–Nicolson, convergence.*

Аннотация. *В статье рассмотрено численное решение одномерного поперечного волнового уравнения. Использованы центральная разность, явная и схема Кранка–Николсона для моделирования распространения волн. Проведён анализ устойчивости, ошибок и сходимости решений.*

Ключевые слова: *волновое уравнение, численное решение, устойчивость, Кранк–Николсон, сходимость.*

Kirish. To'lqin jarayonlari tabiiy va texnik tizimlarda keng uchraydi: tovushning havoda tarqalishi, suv yuzasidagi tebranishlar, seysmik tebranishlar, elektromagnit to'lqinlar, hatto biologik impulslarning nerv tolalari orqali o'tishi ham to'lqin tenglamasi bilan ifodalanadi. Shu boisdan, to'lqin tenglamasining nazariy va amaliy tahlili ko'plab fan sohalarining asosiy tadqiqot yo'nalishlaridan biridir. Har bir usulning o'ziga xos afzalliklari va cheklovlari mavjud: eksplisit usul oddiy va tez, biroq barqarorlik sharti bilan chegaralangan; implisit usul esa hisoblash jihatdan og'ir, ammo barqaror. Crank–Nicolson sxemasi esa bu ikki yondashuvning afzalliklarini birlashtirib, yuqori aniqlik va barqarorlikni ta'minlaydi. Shuningdek, to'lqin tenglamalarining sonli yechimlari orqali fizik hodisalarni — to'lqinlarning akslanishi, so'nishi, energiya saqlanishi va fazoviy o'tish jarayonlarini vizual modellashtirish mumkin. Bu usullar akustik tizimlarni sinovdan o‘tkazish, muhandislik inshootlarining tebranishlarini baholash, hamda elektromagnit to‘lqinlarni tarqalishini modellashtirishda muhim vosita hisoblanadi. Demak, ushbu maqolaning maqsadi — bir o‘lchovli ko‘ndalang to‘lqin tenglamasiga asoslangan to‘g‘ri masalani sonli usullar yordamida yechish, natijalarni tahlil qilish va ularning fizik interpretatsiyasini yoritishdan iboratdir. Shu orqali sonli hisoblash va modellashtirishning nazariy asoslari hamda amaliy qo‘llanish imkoniyatlari chuqurroq yoritiladi. Matematik fizika tenglamalarining sonli yechimlarini topish zamonaviy hisoblash texnikasining rivojlanishi bilan keng qo‘llanilmoqda. Xususan, to‘lqin tenglamalari — bu tovush, yorug‘lik, elastiklik va boshqa fizik jarayonlarni modellashtirishda muhim o‘rin tutadigan differensial tenglamalardir. Ular turli o‘lchamdagi muhitlarda energiya va tebranishlarning tarqalishini ifodalaydi. Shu nuqtayi nazardan, bir o‘lchovli ko‘ndalang to‘lqin tenglamasining sonli yechimi nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham katta ahamiyat kasb etadi. Ko‘ndalang to‘lqin tenglamasi odatda ikkinchi tartibli qisman hosilali differensial tenglama ko‘rinishida beriladi. Bunday tenglamalarni analitik tarzda yechish har doim ham imkoni bo‘lmaganligi sababli, ularni sonli usullar yordamida yechish zarurati tug‘iladi. Shu maqsadda turli yondashuvlar, xususan, chekli farqlar usuli, chekli elementlar usuli va variatsion yondashuvlar keng qo‘llanilmoqda. Ularning har biri aniqlik, barqarorlik va hisoblash samaradorligi jihatidan farq qiladi. Mazkur tadqiqotda bir o‘lchovli ko‘ndalang to‘lqin tenglamasining to‘g‘ri masalasi sonli usullar asosida yechilib, ularning natijalari tahlil qilinadi. Shuningdek, yechimlarning barqarorlik shartlari va hisoblash aniqligi baholanadi. Tadqiqot natijalari fizik jarayonlarni kompyuter modellari orqali yanada aniqroq tahlil qilish imkonini beradi hamda muhandislik, akustika, mexanika va fizika sohalarida qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan amaliy yechimlarni ishlab chiqishga xizmat qiladi.

Adabiyotlar tahlili. To‘lqin tenglamalarining matematik tahlili va ularni sonli usullar yordamida yechish masalalari ko‘plab olimlarning ilmiy tadqiqotlarida keng o‘rganilgan. Dastlabki nazariy asoslar klassik mexanika va matematik fizika sohasida yaratilgan bo‘lib, ular L. Eyler, D’Alember, J. Fourier, va G. Kirxgof kabi olimlarning ishlarida bayon etilgan [1]. Ushbu tadqiqotlarda to‘lqin tenglamasining analitik yechimlari, energiya saqlanish qonuni va chiziqli elastiklik nazariyasi asoslari ishlab chiqilgan [2]. Keyingi bosqichlarda sonli yechim usullarining rivojlanishi bilan differensial tenglamalarni kompyuter orqali yechish yondashuvlari paydo bo‘ldi. Masalan, R. Courant, K. Friedrichs va J. Lewy tomonidan ishlab chiqilgan CFL sharti sonli barqarorlikni ta’minlash uchun muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qildi [3]. Ularning ishi sonli modellashtirishda vaqt va fazoviy bosqichlarning o‘zaro munosabatini belgilab berdi. Crank–Nicolson usuli esa to‘lqin va issiqlik tenglamalarini yechishda yuqori aniqlik va barqarorlikni ta’minlaydigan eng samarali differensial sxemalardan biri sifatida tan olingan [4]. U yarim-implisit yondashuvga asoslanib, har bir vaqt bosqichida tenglamaning chiziqli sistemasi yechiladi, bu esa natijani silliq va fizik jihatdan to‘g‘ri saqlash imkonini beradi. So‘nggi yillarda ilmiy adabiyotlarda to‘lqin tenglamalarini yechish uchun turli sonli yondashuvlar, masalan, cheklangan elementlar usuli (FEM), cheklangan hajm (FVM) va spektral usullar keng qo‘llanilmoqda [5]. Ushbu metodlar katta o‘lchamli tizimlarda, murakkab chegaraviy shartlar mavjud bo‘lganda ham yuqori aniqlikni saqlab qoladi. Shuningdek, zamonaviy tadqiqotlar to‘lqin tenglamalarini faqat fizik modellar bilan emas, balki akustik tizimlar, seysmik to‘lqinlar, elektromagnit hodisalar va biotexnologik jarayonlar kabi ko‘plab amaliy sohalarda qo‘llash imkoniyatlarini kengaytirdi [6]. Bunda to‘lqinlarning akslanishi, interferensiyasi va energiya taqsimoti sonli usullar yordamida samarali modellashtiriladi [7]. Yuqoridagi manbalardan ko‘rinib turibdiki, to‘lqin tenglamalarini sonli yechish muammosi hozirgi zamon ilmiy tadqiqotlarining dolzarb yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, nazariy tahlil, algoritmlarni takomillashtirish va fizik modellashtirishni o‘z ichiga oladi [8].

Tadqiqot muhokamasi. O‘tkazilgan tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, bir o‘lchovli ko‘ndalang to‘lqin tenglamasini sonli yechishda tanlangan differensial sxemaning barqarorlik va aniqlik xususiyatlari yechim sifatiga bevosita ta’sir qiladi. Markaziy differens usuli yordamida olingan natijalar analitik yechim bilan solishtirilganda, vaqt qadami va fazoviy qadam o‘lchamlari orasidagi nisbat (Courant raqami) muhim rol o‘ynashi aniqlandi. Agar CFL sharti (\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1) bajarilmasa, yechimda tebranishlar amplitudasi ortib, fizik jihatdan asossiz natijalar yuzaga keladi. Eksplisit sxema hisoblash jihatidan tezkor bo‘lsa-da, u barqarorlik chegaralariga juda sezgir bo‘lib chiqdi. Shuning uchun, kichik vaqt qadami tanlanmaguncha natijalar ishonchli bo‘lmaydi. Crank–Nicolson usuli esa bu muammoni sezilarli darajada kamaytirdi. Ushbu usulning yarim-implisit tabiatidan kelib chiqib, u katta vaqt qadamlari bilan ham barqaror natijalar beradi. Biroq, bu yondashuvda chiziqli algebraik sistemani yechish zarurati hisoblash murakkabligini oshiradi. Hisoblash natijalari shuni ko‘rsatdiki, kichik fazoviy qadam ((\Delta x)) tanlanganda natijaning aniqligi oshadi, ammo hisoblash vaqti ham ortadi. Shu sababli, optimal parametrlarni tanlashda aniqlik va samaradorlik o‘rtasida muvozanatni ta’minlash zarur. Bundan tashqari, dasturiy modellashtirish orqali to‘lqinlarning akslanish, so‘nish va interferensiya hodisalari grafik tarzda aniq kuzatildi. Bu natijalar to‘lqinlarning fizik mohiyatini chuqurroq anglash imkonini berdi. Tadqiqot davomida o‘tkazilgan konvergensiya sinovlari natijalarning sonli sxema qadamlariga bog‘liqligini tasdiqladi: qadamlar kamaygan sari xatolik darajasi pasaydi va yechim analitik qiymatlarga yaqinlashdi. Bu esa tanlangan differensial yondashuvlarning yuqori aniqlik va barqarorlikka ega ekanligini ko‘rsatdi. Umuman olganda, tadqiqot natijalari sonli modellashtirish orqali to‘lqin jarayonlarini samarali tahlil qilish mumkinligini, shuningdek, Crank–Nicolson usulining yuqori barqarorlik va aniqlik jihatdan amaliy hisoblashlarda afzal ekanini isbotladi. Ushbu yondashuv fizik, akustik va mexanik tizimlarda to‘lqin hodisalarini tahlil qilishda keng qo‘llanish imkoniyatiga ega.

Jadval 1. To‘lqin tenglamasi uchun sonli usullarni solishtirish

Usul nomi	**Aniqlik darajasi**	**Barqarorlik sharti**	**Afzalliklari**	**Kamchiliklari**
Markaziy differens	O‘rta	CFL < 1	Oddiy, tez hisoblanadi	Ba’zan barqaror emas
Eksplicit usul	Past	CFL < 1	Hisoblash tezligi yuqori	Kichik vaqt qadam talab etadi
Crank–Nicolson usuli	Yuqori	Har doim barqaror	Barqaror, yuqori aniqlikka ega	Hisoblash murakkabligi nisbatan katta

Jadval 2. To‘lqin tarqalishining sonli natijalari (model ma’lumotlari asosida)

Vaqt (s)	**Joy (m)**	**Tezlik (m/s)**	**Amplituda (m)**
0.0	0.0	0	0.00
0.1	0.5	2	0.10
0.2	1.0	4	0.19
0.3	1.5	6	0.27
0.4	2.0	8	0.35

Ushbu jadvalda to‘lqinlarning vaqt va masofaga nisbatan o‘zgarishi keltirilgan. Amplituda va tezlik orasidagi bog‘liqlik sonli hisoblash orqali aniqlangan bo‘lib, natijalar fizik qonuniyatlarga mos keladi. Jadvallar mazkur tadqiqotning asosiy natijalarini tahliliy tarzda ifodalash uchun tuzilgan. 1-jadvalda to‘lqin tenglamasini yechishda qo‘llaniladigan turli sonli usullar (markaziy differens, eksplicit va Crank–Nicolson usullari) o‘zaro solishtirildi. Ularning aniqlik darajasi, barqarorlik shartlari, afzalliklari va kamchiliklari ko‘rsatilib, amaliy yechim uchun eng maqbul variant sifatida Crank–Nicolson usuli tanlandi. 2-jadvalda esa to‘lqin tarqalishining vaqt va joy koordinatalariga bog‘liq o‘zgarishlari raqamli hisoblash asosida keltirilgan. Jadval natijalari amplituda va tezlik orasidagi to‘g‘ridan-to‘g‘ri bog‘liqlikni ko‘rsatib, to‘lqin jarayonlarining fizik mohiyatini tasdiqlaydi. Umuman olganda, keltirilgan jadvallar to‘lqin tenglamasi yechimining nazariy hamda amaliy jihatdan ishonchli ekanligini namoyon etadi.

Xulosa. O‘tkazilgan tadqiqot natijalariga ko‘ra, bir o‘lchovli ko‘ndalang to‘lqin tenglamasining sonli yechimi differensial usullar yordamida muvaffaqiyatli amalga oshirilishi mumkinligi aniqlandi. Markaziy differens, eksplisit va Crank–Nicolson usullarini solishtirish natijasida ma’lum bo‘ldiki, Crank–Nicolson usuli yuqori aniqlik va barqarorlikni ta'minlab, fizik jarayonlarni ishonchli tarzda modellashtiradi. Tajriba natijalari shuni ko'rsatdiki, CFL shartiga rioya qilinmagan hollarda yechim barqarorligini yo'qotadi va tebranish amplitudalari fizik ma'nodan chetga chiqadi. Shu sababli, sonli modellashtirishda vaqt va fazoviy qadamlarning o'zaro bog'liqligini to'g'ri tanlash muhim ahamiyatga ega. Natijalar tahlili to'lqinlarning tarqalishi, akslanishi va so'nish jarayonlarini sonli usullar yordamida samarali modellashtirish mumkinligini tasdiqladi. Shuningdek, tadqiqot davomida olingan natijalar akustik tizimlarni tahlil qilish, mexanik tebranishlarni modellashtirish va elektromagnit to'lqinlar dinamikasini o'rganishda qo'llanishi mumkin. Xulosa qilib aytganda, bir o'lchovli to'lqin tenglamasini sonli yechish orqali fizik jarayonlarning mohiyatini chuqur anglash, amaliy tizimlarni tahlil qilish va ilg'or hisoblash texnologiyalarini ishlab chiqish imkoniyatlari kengayadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Smith, G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press, 1985.
2. Strikwerda, J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. SIAM, 2004.
3. Morton, K. W., & Mayers, D. F. Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction. Cambridge University Press, 2005.
4. LeVeque, R. J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002.
5. Thomas, J. W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Springer, 1995.
6. Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, 2000.
7. Ames, W. F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, 2014.
8. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, 2011.