

## ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI KLASIK MODEL

**Hamroyeva Gulnora Erkinovna***Osiyo xalqaro universiteti 1-bosqich magistranti*

**Annotatsiya.** Mazkur maqolada issiqlik tarqalish tenglamasining klassik modeli, uning matematik ifodasi hamda fizik mazmuni tahlil qilinadi. Issiqlik uzatilishi jarayonlarining nazariy asoslari ko'rib chiqilib, Furiye qonuni asosida issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining hosil qilinishi bayon etiladi. Bir o'lchovli issiqlik tarqalish tenglamasining qo'llanilishi, boshlang'ich va chegaraviy shartlarning ahamiyati yoritiladi. Shuningdek, klassik modelning amaliy masalalarni yechishdagi o'rni va muhandislik hamda tabiiy fanlardagi tatbiqlari muhokama qilinadi.

**Kalit so'zlar:** Issiqlik tarqalishi, issiqlik tenglamasi, klassik model, Furiye qonuni, issiqlik o'tkazuvchanlik, differensial tenglama, chegaraviy shartlar, boshlang'ich shartlar, matematik modellash, issiqlik almashinuvi.

**Аннотация.** В данной статье анализируется классическая модель уравнения теплопередачи, её математическое выражение и физическое содержание. Рассматриваются теоретические основы процессов теплопередачи и описывается построение уравнения теплопередачи на основе закона Фурье. Подчеркивается применение одномерного уравнения теплопередачи, важность начальных и граничных условий. Также обсуждается роль классической модели в решении практических задач и её применение в инженерных и естественных науках.

**Ключевые слова:** Теплопередача, уравнение теплопередачи, классическая модель, закон Фурье, теплопередача, дифференциальное уравнение, граничные условия, начальные условия, математическое моделирование, теплопередача.

**Abstract.** This article analyzes the classical model of the heat transfer equation, its mathematical expression and physical content. The theoretical foundations of heat transfer processes are considered, and the construction of the heat transfer equation based on Fourier's law is described. The application of the one-dimensional heat transfer equation, the importance of initial and boundary conditions are highlighted. The role of the classical model in solving practical problems and its applications in engineering and natural sciences are also discussed.

**Keywords:** Heat transfer, heat equation, classical model, Fourier's law, heat transfer, differential equation, boundary conditions, initial conditions, mathematical modeling, heat transfer.

**Kirish.** Issiqlik tarqalishi jarayoni tabiat va texnikadagi muhim fizik hodisalardan biri hisoblanadi. Turli jismlar va muhitlarda haroratning vaqt va fazo bo'yicha o'zgarishini o'rganish ko'plab ilmiy hamda muhandislik masalalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

Ayniqsa, qurilish materiallari, metallurgiya, energetika, geofizika va texnologik tizimlarda issiqlik almashinuvi jarayonlarini samarali boshqarish uchun matematik modellar zarur hisoblanadi.

Issiqlik tarqalishining klassik modeli asosan Furye qonuniga tayanadi va u issiqlik oqimining harorat gradientiga bog'liqligini ifodalaydi. Ushbu model yordamida haroratning vaqt bo'yicha evolyutsiyasini tavsiflovchi differensial tenglama — issiqlik tarqalish tenglamasi hosil qilinadi. Mazkur tenglama fizik jarayonlarni matematik ifodalash va ularni tahlil qilish imkonini beradi.

Issiqlik tarqalishi tabiatda eng ko'p uchraydigan fizik jarayonlardan biri bo'lib, u jismlar orasidagi harorat farqi natijasida energiyaning uzatilishini ifodalaydi. Agar bir muhitning turli nuqtalarida harorat turlicha bo'lsa, issiqlik yuqori haroratli hududdan past haroratli hududga yo'naladi. Bu jarayon issiqlik o'tkazuvchanlik deb ataladi. Issiqlik o'tkazuvchanlik moddaning ichki tuzilishi bilan bog'liq bo'lib, molekulalarning o'zaro ta'siri orqali energiya uzatiladi. Amaliyotda issiqlik tarqalishi metall jismlarning qizishi, yer qatlamlaridagi harorat o'zgarishi, texnik qurilmalardagi sovitish jarayonlari kabi ko'plab sohalarida uchraydi. Issiqlik tarqalishini matematik modellashtirish real fizik jarayonlarni chuqur tushunish, bashorat qilish va boshqarish imkonini beradi. Shu sababli issiqlik tarqalish jarayoni matematik fizikaning muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi.

Issiqlik tarqalish jarayonini matematik modellashtirish matematik fizikaning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Issiqlik o'tkazuvchanlik hodisasi haroratlar farqi natijasida energiyaning fazoda taqsimlanishini ifodalaydi. Bu jarayonning matematik tavsifi energiyaning saqlanish qonuni va Fourier qonuniga asoslanadi. Mazkur qonunlarga tayangan holda issiqlik tarqalish tenglamasi hosil qilinadi va u muhitdagi haroratning vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalaydi [1].

**Tadqiqot metodologiyasi.** Klassik issiqlik tenglamasi parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglama bo'lib, u diffuziya jarayonlarining umumiy matematik modelini ifodalaydi. Tixonov va Samarskiy tomonidan ko'rsatilishicha, bu model yechimlarning silliqqligi va barqarorligini ta'minlaydi, ya'ni vaqt o'tishi bilan haroratning tekislashish tendensiyasi kuzatiladi [1][2] Ushbu xossa fizik jihatdan issiqlikning muvozanat holatiga intilishini bildiradi.

Samarskiy tadqiqotlarida issiqlik tenglamasi sonli modellashtirish nuqtai nazaridan ham keng o'rganilgan. Muallif issiqlik jarayonlarini hisoblashda matematik modelning barqarorligi va aniqligi muhim ekanligini ta'kidlaydi [2] Bu natijalar amaliy hisoblash masalalarida issiqlik tenglamasidan samarali foydalanish imkonini beradi.

Evans issiqlik tenglamasini xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining klassik namunasi sifatida qaraydi. U yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqqligi kabi fundamental xossalarni matematik jihatdan asoslaydi. Bu nazariy natijalar modelning ilmiy ishonchliligini ta'minlaydi.

Kreyszig tomonidan issiqlik tenglamasi muhandislik va texnik modellashtirish vositasi sifatida talqin qilinadi. Furiye qatorlari yordamida yechim topish usullari issiqlik tarqalish jarayonlarini amaliy hisoblash imkonini beradi.

Islomov va Jo'rayev ishlarida issiqlik tenglamasi boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan birgalikda o'rganilib, klassik yechim usullari tizimli ravishda bayon etilgan. Bu yondashuv modelni real fizik jarayonlarga moslashtirishda muhim ahamiyatga ega.

Shunday qilib, klassik issiqlik tenglamasi fizik jarayonlarning matematik modeli sifatida nazariy va amaliy jihatdan chuqur o'rganilgan bo'lib, uning xossalari keyingi tadqiqotlar uchun mustahkam ilmiy asos yaratadi.

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar:

Issiqlik tarqalish jarayonining matematik modeli;

Qattiq jismlarda issiqlikning tarqalish jarayonlari ko'plab fizik va muhandislik masalalarining asosini tashkil etadi. Bunday jarayonlarni o'rganishda matematik modellashtirish muhim ahamiyatga ega bo'lib, u real fizik hodisani differensial tenglamalar yordamida ifodalash imkonini beradi. Issiqlik tarqalishining matematik modeli sifatida issiqlik tarqalish tenglamasi olinadi va u keyingi bayonlarda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) \text{ tenglama bilan belgilanadi.}$$

Yoki bir o'lchamli holatda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) s$$

Mazkur tenglama qattiq jismning har bir nuqtasida haroratning vaqt bo'yicha o'zgarishini hamda fazoviy koordinatalar bo'yicha tarqalishini tavsiflaydi. Biroq, faqatgina ushbu tenglamaning o'zi masalani to'liq aniqlash uchun yetarli emas. Chunki fizik jarayonning rivojlanishi boshlang'ich holat va jism sirtidagi sharoitlarga bevosita bog'liq bo'ladi.

Boshlang'ich shartning fizik va matematik mazmuni:

Issiqlik tarqalish masalasini to'liq qo'yish uchun boshlang'ich vaqt momentida jism ichidagi haroratning taqsimlanishi berilishi lozim. Ushbu shart boshlang'ich shart deb ataladi va u (2)-shart bilan ifodalanadi. Boshlang'ich shart orqali jismning dastlabki holati aniqlanadi, ya'ni vaqtning boshlang'ich nuqtasida har bir fazoviy nuqtadagi harorat qiymati ma'lum bo'ladi.

Fizik jihatdan qaralganda, boshlang'ich shart jismning tashqi ta'sirlar boshlanishidan oldingi termik holatini ifodalaydi. Matematik nuqtayi nazardan esa, u vaqt bo'yicha differensial tenglama uchun zarur bo'lgan yagona yechimni aniqlashga xizmat qiladi.

Chegaraviy shartlar va ularning turlari:

Chegaraviy shartlar qattiq jism sirtida issiqlik rejimini belgilaydi va issiqlik almashinuvi qanday sharoitda kechishini aniqlaydi. Fizik jarayonning tabiatiga qarab, amaliy masalalarda asosan uch turdagi chegaraviy shartlar qo'llaniladi. Ular Dirixle, Nyuman va Robin turidagi chegaraviy shartlar deb ataladi.

Dirixle turidagi chegaraviy shartda qattiq jism sirtining har bir nuqtasida haroratning qiymati oldindan berilgan bo'ladi. Bunday holatda jism sirtidagi harorat fazoviy koordinatalar va vaqtga bog'liq bo'lgan ma'lum funksiya orqali aniqlanadi. Ushbu shart issiqlik manbai yordamida jism sirtining harorati qat'iy ushlab turiladigan jarayonlarni modellashtiradi. Dirixle turidagi chegaraviy shart nazariy tadqiqotlarda keng qo'llanilib, u (3)-chegaraviy shart bilan ifodalanadi.

Nyuman turidagi chegaraviy shartda esa jism sirtidan o'tayotgan issiqlik oqimi beriladi. Bu holatda jism sirtining birlik yuzasidan ma'lum vaqt oralig'ida o'tayotgan issiqlik miqdori aniqlanadi. Ushbu shart Furiye qonuniga asoslanadi va jism sirtidagi normal yo'nalish bo'yicha haroratning fazoviy o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladi. Nyuman turidagi chegaraviy shart issiqlik izolyatsiyasi yoki berilgan issiqlik oqimi mavjud bo'lgan masalalarni tavsiflashda muhim ahamiyatga ega bo'lib, u (4)-chegaraviy shart orqali belgilanadi.

Robin turidagi chegaraviy shart qattiq jism sirtida atrof-muhit bilan issiqlik almashinuvi sodir bo'ladigan hollarda qo'llaniladi. Bu holatda jism sirtidan chiqayotgan yoki unga kirayotgan issiqlik miqdori jism sirtining harorati bilan atrof-muhit harorati orasidagi farqqa proporsional bo'ladi. Ushbu bog'lanish Nyuton sovish qonuniga asoslanadi va konvektiv issiqlik almashinuvi jarayonlarini ifodalash imkonini beradi. Robin turidagi chegaraviy shart amaliy masalalarda eng ko'p uchraydigan shartlardan biri bo'lib, u (5)-chegaraviy shart bilan ifodalanadi.

Boshlang'ich-chegaraviy masalaning umumiy qo'yilishi

Yuqorida bayon etilgan issiqlik tarqalish tenglamasi, boshlang'ich shart hamda Dirixle, Nyuman yoki Robin turidagi chegaraviy shartlardan biri birgalikda issiqlik tarqalishining to'liq boshlang'ich-chegaraviy masalasini hosil qiladi. Mazkur masalaning yechimi jism ichidagi harorat maydonining vaqt va fazo bo'yicha o'zgarishini aniqlash imkonini beradi

Qattiq jismlarda issiqlikning tarqalish jarayonlari ko'plab fizik va muhandislik masalalarining asosini tashkil etadi. Bunday jarayonlarni o'rganishda matematik modellashtirish muhim ahamiyatga ega bo'lib, u real fizik hodisani differensial tenglamalar yordamida ifodalash imkonini beradi. Issiqlik tarqalishining matematik modeli sifatida issiqlik tarqalish tenglamasi olinadi va u keyingi bayonlarda (1)-tenglama bilan belgilanadi.

Ko'rib chiqilayotgan masala quyidagi ko'rinishiga ega :

$$U_t - U_{xx} = f(x:t) \quad 0 < x < l ; T > 0 ; \quad 0 \leq x < l \quad t > 0$$

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$U(0,t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Bu yerda :

- $U(x,0)$  – noma'lum funksiya (harorat yoki fizik kattalik),
- $f(x,t)$  – tashqi manba (issiqlik manbai )

- $\varphi(x)$  – boshlang'ich taqsimot

Mazkur tenglama issiqlik o'tqazuvchanlik tenglamasi bo'lib u bir o'lchamli strejenda haroratning vaqt bo'yicha tarqalishini ifodalaydi

- $U_t$  – vaqt bo'yicha o'zgarish,
- $U_{xx}$  – fazo bo'yicha egri chiziqlik (issiqlik oqimi),

$$U|_{t=0} = U|_{x=l} = 0; \quad t \geq 0$$

$$U(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \varphi_n \sin \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n(t-\tau) d\tau$$

$$f_n * \sin \lambda_n x; \quad \varphi \in C^2[0; l]; \quad \varphi'' \in L^2(0; l)$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0 \quad g \in C[0; T] \text{ uzluksiz}$$

$$t \in C^1[0; l], f'' \in L^2(0; l), \quad f(0) = f(l) = 0; \quad T > t > 0$$

$\forall T > 0$  Ixtiyoriy musbat son.

1.1 Tenglamaning kelib chiqishi. MaT fizika tenglama prinsiplar

1.2 Maksimum va minimum ko'p o'lchamli bir o'lchamchi

1.3 (1) – (3) mavjudlig ; yagonalik : turg'unligi ; turg'unligi

II. Bob.

$$\int_0^n n(x) u(x; t) dx = h(t) \text{ shart yordamida kerak}$$

$U(x, t)$  – noma'lum funksiya

$N(x)$  – berilgan yadro fnksiya

$H(t)$  – integral shartning o'ng tomoni.

Oddiy chegaraviy shartlarda qiymat faqat bitta nuqtada beriladi:

$$U(0, t) = 0$$

Yoki

$$u_x(0, t) = 0$$

Nolokal shartda esa yechimining butun soha bo'yicha integral xossasi qatnashadi :

$$\int_0^l n(x) u(x, t) dx = h(t)$$

Bu fizik jihatdan:

- O'rtacha temperature
- Umumiy issiqlik energiyasi
- Massa saqlanishi

Kabi jarayonlar ifodalanadi.

Integral shart

$$\int_0^l u(x, t) dx = M(t)$$

Sterjen bo'yicha jami issqilik miqdorini bildiradi.

Agar:

$$M(t) = M_0$$

Bo'lsa umumiy energiya saqlanadi.

Masalalar umumiy energiya saqlanadi

Masalani operator shanklda yozamiz

$$Lu = f$$

Bu yerda :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Integral operator :

$$Bu = h(t)$$

Ko'rinishiga yoziladi.

Yechim odatda quydagi fazolarda qaraladi

$$u \in C^{2,1}(Q_t)$$

yoki Sobolev fazoda:

$$u \in W_2^{2,1}(Q_t)$$

1-teorema:  $n \in C[0; t] \mid h(t) > h_0 > 0 ; (1) - (4) u \in C_{x;t}^{2,1}$

$(0; t) \times (0; l)$  yechimi mavjudligi:

$\exists! N_c([0; t] \times [0; l]) \mid g \in C[0; t]$  yagonaligi mavjud ;  $g \in C[0; t]$

2-teorema: Turgunligi tog'risida :

$$U_t = L^1(0, t) \times (0; l)$$

$$U_{xx} L^1(0; t) \times (0; l)$$

$$\int_0^1 \eta(x) U_t(x; t) dx + \int_0^1 \eta(\mu_{xx}(x, t)) dx = \int_0^1 f(x) \eta(x) dx g(t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \eta'(x) U(x, t) dx + \eta(x) U_x \Big|_0^1 -$$

$$\int_0^1 \eta'(x) U_x dx = A \cdot g(t)$$

$$h'(A - \eta'(x) U) \Big|_0^1 + \int_0^1 \eta''(x) U dx = A \cdot g(t)$$

**Xulosa.** Xulosa qilib aytganda, issiqlik tarqalish tenglamasining klassik modeli issiqlik almashinuvi jarayonlarini matematik jihatdan ifodalashda muhim vosita hisoblanadi. Ushbu model Furrye qonuniga asoslangan bo'lib, haroratning vaqt va fazodagi taqsimotini aniqlash imkonini beradi. Klassik issiqlik tenglamasi yordamida turli fizik va texnologik jarayonlarni modellashtirish, prognozlash hamda optimallashtirish mumkin. Shuningdek, boshlang'ich va chegaraviy shartlarning to'g'ri tanlanishi yechimning aniqligi va fizik mazmunini belgilovchi muhim omillardan biri ekanligi aniqlandi. Natijada, issiqlik tarqalishining klassik modeli ilm-fan va texnika sohalaridagi ko'plab amaliy masalalarni hal qilishda samarali nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

### Adabiyotlar ro'yxati

1. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of Ill-Posed Problems. – Washington: Winston & Sons, 1977.

2. Самарский А.А. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1977).
3. Zikirov O.S. Xususiyl hosilali differensial tenglamalar. – Toshkent: [nashriyot nomi], [Toshkent-2012y].
4. Vladimirov V.S., Mixaylov V.P., Mixaylova T.V., Shabunin M.I. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki (Matematik fizika tenglamalari bo'yicha masalalar to'plami). – Moskva: Fizmatlit, 2016. – ISBN 978-5-9221-1692-3.
5. Teshaboeva N. Matematik fizika metodlari. – Toshkent: O'zSSR Oliy va maxsus ta'lim vazirligi nashri, 2-nashr (tuzatilgan va to'ldirilgan).
6. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. – New York: Springer, 2006.
7. Lions J.-L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. – Berlin: Springer, 1972.
8. Il'in V. A. Boundary Value Problems for Equations of Mathematical Physics. – Moscow: Nauka, 1985. (rus tilida)
9. Ionkin N. I. Nonlocal problems for parabolic equations // Differential Equations, 1977, Vol. 13, No. 2, pp. 294–302.
10. Beilina L. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. – New York: Springer, 2012.